University of Namur

MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Quelques réflexions sur l'enseignement ds mathématiques en sciences biologiques

Boly, Julie

Award date:
2001

FACULTES UNIVERSITAIRES NOTRE-DAME DE LA PAIX
NAMUR
FACULTES DES SCIENCES

Quelques réflexions sur l'enseignement des mathématiques en première candidature en sciences biologiques.

Mémoire présenté pour l'obtention du grade
de Licenciée en Sciences
Mathématiques
par

Promotrice : Suzanne Thiry

Julie Boly

Année académique 2000-2001

REMERCIEMENTS

Je voudrais tout d'abord remercier Madame Thiry, ma promotrice, de m'avoir proposé un mémoire en didactique et de m'avoir permis de le réaliser. Je la remercie de m'avoir suivie pas à pas, durant toute cette année et de m'avoir consacré une partie de son temps pour me conseiller, me diriger, m'aider afin de rédiger ce mémoire.

Je voudrais ensuite remercier Messieurs Bodart et Darville (professeurs de physique en première candidature en sciences biologiques aux Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix à Namur), Madame Frising (maître en didactique en sciences physiques aux Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix), ainsi que Madame Ravet (assistante en première candidature en sciences chimiques aux Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix) de m'avoir consacré leur temps en répondant à mes questions, afin de me permettre de mieux cerner le contenu des cours de physique et chimie en première candidature en sciences biologiques ainsi que la place qu'occupent les mathématiques dans ceux-ci. J'adresse aussi mes remerciements à Messieurs d'Oultremont, Depiereux, Descy et Van Cutsem (chercheur et professeurs en candidatures et licences en sciences biologiques aux Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix), pour m'avoir guidée, aiguillée en répondant à mes interrogations concernant les rapports entretenus entre la biologie et les mathématiques.

Je remercie également Madame Schneider (professeur en didactique aux Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix) et Monsieur Domange (professeur de mathématiques dans le cycle secondaire supérieur (transition générale) à l'institut Sainte-Marie Namur) de m'avoir prêté les programmes de l'enseignement secondaire supérieur de transition en mathématiques.

Enfin, mes remerciements vont à Aurélie Tacheny, étudiante en deuxième licence en sciences biologiques aux Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix, pour m'avoir prêté ses cours de candidatures et licences en sciences biologiques, ainsi qu'aux étudiants de première candidature et de deuxième licence en sciences biologiques aux Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix à Namur pour avoir répondu à mes interviews.

RESUME

Dans la première partie de ce travail, nous avons analysé le cours de mathématiques de première candidature en sciences biologiques, ainsi que les besoins en outils mathématiques de différents cours scientifiques (chimie et physique) de première candidature en sciences biologiques aux Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix - Namur - Belgique. A la suite de ces analyses, plusieurs questionnements concernant le cours de mathématiques et le rapport entre celui-ci et les autres cours analysés sont survenus. Pour tenter d'y répondre, nous avons rencontré des enseignants de chimie, de physique ainsi que des étudiants de première candidature en sciences biologiques ; nous avons également analysé le programme de mathématiques des deux dernières années de l'enseignement secondaire de transition.

Dans la seconde partie, nous avons analysé les besoins en outils mathématiques dans le cours de biologie de première candidature, dans la suite des études universitaires en biologie et après la fin de celles-ci. A nouveau, des interrogations se sont profilées à propos de la place et du rôle qu'occupent les mathématiques en biologie. Pour essayer d'y répondre, nous avons rencontré des étudiants de deuxième licence en sciences biologiques, des professeurs et un chercheur en biologie.

Dans la troisième partie, nous avons tenté d'évaluer la place réservée aux mathématiques dans les études de biologie en général.

Dans la quatrième partie, nous avons esquissé un programme de mathématiques, adapté aux besoins des étudiants biologistes de première candidature aux Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix - Namur - Belgique. Nous avons également épinglé certaines améliorations possibles à apporter au cours de mathématiques actuel de première candidature en biologie. Enfin, nous avons rédigé en détail un chapitre du cours de mathématiques de première candidature en tenant compte des améliorations à y apporter.

SUMMARY

In the first part of this work, we analysed the Mathematics course in the first one-year term(*) in Biology, as well as the needs in mathematical tools of different scientific subjects (Chemistry and Physics) in the first one-year term in Biology, at the university "Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix" - Namur - Belgium. With reference to these analyses, several questions concerning the mathematical course and the relation between it and the other analysed subjects arose. In an attempt to answer them, we met Chemistry and Physics teachers, as well as students in the first one-year term in Biology ; we also analysed the curriculum in Mathematics in the last two forms in secondary school, in the section called "transition".

In the second part, we analysed the needs in mathematical tools of the biological course in the first one-year term, in the following forms and after the studies. Questions concerning the place and the role of Mathematics in Biology were brought up as well. To try to answer them, we met students in the fourth one-year term(**) in Biology, teachers and a searcher in Biology.

In the third part, we attempted to estimate the place of Mathematics in the studies of Biology in general.

In the fourth part, we designed a curriculum of Mathematics, adjusted to the needs of the students in Biology in the first one-year term at the university "Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix" - Namur - Belgium. We also pointed out some possible improvements to contribute to the present Mathematics course in the first one-year term in Biology. Finally, we wrote a detailed chapter of the mathematical course in the first one-year term in order to take into account the new elements which could contribute to a better programme.

(*) called "première candidature" in Belgium
(**) called "deuxième licence" in Belgium

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Nous avons, comme point de départ, voulu savoir si le cours de mathématiques en première candidature biologie aux Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix (FUNDP) et son contenu coïncidaient avec les attentes, les besoins des professeurs et étudiants en biologie aux FUNDP et à quoi pouvaient servir les mathématiques en biologie. C'est ce qui a motivé notre mémoire. Le but premier de ce mémoire est d'analyser le cours de mathématiques afin d'essayer d'améliorer, le cas échéant, sa cohérence et sa concordance avec les autres cours de première candidature en biologie. Nous avons également souhaité nous rendre compte de la place et du rôle qu'occupent les mathématiques en biologie.

Notre démarche initiale fut de consulter divers ouvrages traitant des « mathématiques pour les sciences de la vie ». Très vite, nous nous sommes aperçue que ces termes recouvraient deux types de contenus différents, à savoir :

- les documents présentant des sujets mathématiques sous forme d'un véritable cours théorique de mathématiques, illustré par quelques exemples d'applications en biologie. (Allain, Dorange, Langloi, [1] ; Azoulay, [5] ; Barnett et Ziegler, [6] ; Bertrandias, [8] ; Blondel, [9] ; Courrière, Plusquellec, [12] ; Geller, [15], [16] ; Swokowski, [21] ; Tebutt, [22])
- les documents traitant de biologie, dans lesquels les sujets sont décrits au moyen d'un langage mathématique. (Atkins, [4] ; Hoppensteadt et Peskin, [18] ; Murray, [19])

Nous avons alors décidé de consacrer la première partie de notre travail aux mathématiques comme outil au service de différents cours de première candidature en biologie aux Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix : quelles sont les notions mathématiques nécessaires pour ces cours ?, quelles sont les difficultés liées aux mathématiques qu'y rencontrent les étudiants ?,... Nous avons également étudié le programme du 3ème degré du cycle secondaire en transition 4 et 6 périodes par semaine afin de nous rendre compte des notions déjà abordées par les étudiants qui entrent en première candidature biologie.

La deuxième partie est dédiée aux mathématiques comme outil au service de la biologie. Celles-ci sont nécessaires dans tout ce qui est recherche de nature quantitative et elles permettent de traduire et de modéliser certains phénomènes biologiques. Pour cela, il est nécessaire de décrire des relations entres grandeurs : la compréhension du monde autour de nous conduit souvent à décrire la manière dont des grandeurs sont liées et varient les unes par rapport aux autres. Les mathématiques ont donc leur place dans les sciences de la vie.

Dans la troisième partie, nous avons voulu savoir quelle place occupent les mathématiques dans les études de biologie en général.

Ces différentes études nous ont permis, dans la quatrième partie, d'esquisser un programme de mathématiques adapté aux besoins des étudiants en première candidature biologie aux FUNDP, de relever des améliorations à apporter au cours de mathématiques actuel qui leur est destiné et de développer en détail un chapitre de ce cours choisi adéquatement par rapport à ce qui a été constaté dans les améliorations possibles.

Chapitre 1

Les mathématiques comme outil au service de différents cours de première candidature en sciences biologiques aux Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix.

1.1 Introduction

Dans cette première partie, nous avons voulu comprendre quels étaient la place et le rôle des mathématiques dans différents cours scientifiques de première candidature en biologie. Nous avons tout d'abord analysé en détail le contenu du cours de mathématiques de première candidature en biologie. Ensuite, nous avons relevé les notions mathématiques apparaissant dans les cours de chimie et de physique de première candidature biologie. Grâce à l'analyse du cours de mathématiques, nous avons pu classer ces notions en deux catégories : celles apparaissant à la fois dans le cours de mathématiques et dans les cours de chimie ou de physique et les autres.

Ces diverses analyses ont suscité des questionnements (matières à placer dans le cours de mathématiques, cohérence de ce cours avec les autres cours étudiés,...). Nous avons tenté d'y répondre en interrogeant des professeurs de chimie et de physique, ainsi que des étudiants de première candidature en biologie aux Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix. L'analyse du programme de mathématiques du troisième degré de l'enseignement secondaire de transition nous a également aidé à apporter des éléments de réponses.

1.2 Analyse du cursus de première candidature en biologie (1)

Les cours scientifiques dispensés aux étudiants de première candidature en sciences biologiques aux Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix se répartissent comme suit :

- **biologie** biologie générale écologie générale	 SBIO 1102 SBIO 1112	155 heures (105 de théorie et 50 de travaux pratiques)
- **chimie** chimie générale introduction à la chimie organique	 SCHI 1104, SCHI 1145 SCHI 1102	170 heures (120 de théorie et 50 de travaux pratiques et dirigés)
- **mathématiques**	SMAT 1105	75 heures (45 de théorie et 30 de travaux dirigés)
- **physique expérimentale**	SPHY 1105, SPHY 1117	165 heures (120 de théorie et 45 de travaux pratiques et dirigés)

Dans ce premier chapitre, nous avons analysé le cours de MATHEMATIQUES (SMAT 1105) pour prendre connaissance des notions développées actuellement dans ce cours.

Nous avons également choisi d'étudier le cours de PHYSIQUE EXPERIMENTALE (SPHY 1105 et SPHY 1117) ainsi que celui de CHIMIE GENERALE (SCHI 1104 et SCHI 1145).

Le cours de BIOLOGIE GENERALE (SBIO 1102) sera traité dans le second chapitre.

(1) source : Programme des cours, [20]

1.2.1 analyse détaillée du cours de mathématiques (SMAT 1105, 45 heures théoriques, S.Thiry)

L'étude de ce cours a porté sur une analyse des divers chapitres constituant les syllabi (Thiry, [23]). Grâce à celle-ci, nous nous sommes familiarisée avec les sujets traités dans le cours. Ensuite, l'analyse des cours de chimie et physique nous a permis de dresser une liste des différentes notions « mathématiques » utilisées dans ces cours. Une synthèse de ces informations est présentée au § 1.2.4.

Nous pouvons d'ores et déjà, remarquer, dans ce cours, la volonté du professeur d'introduire la matière par des applications, des problèmes à caractère « biologique » afin de motiver la nécessité de celle-ci. La majeure partie de la théorie est illustrée par des exemples, des graphiques, ce qui devrait permettre à l'étudiant de mieux comprendre, de mieux se représenter les concepts proposés.

Le cours de mathématiques se compose des chapitres suivants :

1. Calcul matriciel et systèmes d'équations linéaires
2. Eléments de calcul vectoriel
3. Les fonctions réelles élémentaires
4. Les dérivées d'une fonction réelle
5. Primitives et intégrales
6. Fonctions logarithmes et exponentielles
7. Polynômes de Taylor
8. Introduction aux équations différentielles du premier ordre
9. Les nombres complexes
10. Fonctions de plusieurs variables

Nous allons maintenant détailler le contenu de chaque chapitre. Quelques questions étant survenues à la suite de l'analyse de ce cours, nous avons tenté d'y répondre en discutant avec le professeur titulaire du cours.

<u>Analyse détaillée du cours de mathématiques de première candidature en biologie :</u>

1. **<u>Calcul matriciel et systèmes d'équations linéaires :</u>**

Ce chapitre est divisé en 4 parties :

1. L'utilisation du symbole mathématique de sommation Σ :

<u>Contenu :</u>
Il s'agit ici de rappeler la signification de l'écriture Σx_i et de mentionner quelques propriétés liées à cette manière de présenter une somme.

Commentaires :
On peut se demander si un tel rappel a bien sa place dans un cours de première candidature. Après discussion avec le professeur, il est apparu qu'utiliser d'emblée ce symbole sans l'avoir préalablement défini et manipulé dans des cas simples, posait problèmes à certains étudiants qui n'ont jamais rencontré cette écriture durant leurs humanités. C'est donc pour prévenir d'éventuelles difficultés qu'un petit paragraphe a été consacré au symbole de sommation.

2. *Les matrices :*

Contenu :
Il s'agit uniquement de considérer les matrices comme tableaux de nombres. On explique également les opérations de base sur les matrices et le calcul matriciel élémentaire.
Le lien entre les matrices et la représentation d'une application linéaire dans des bases d'espaces vectoriels n'est pas du tout abordé.

Questions :

1) Tous les étudiants n'ont-ils pas étudié les matrices en humanités ?

Le professeur nous a indiqué et l'étude du programme d'humanités le confirmera (voir § 1.4.2) que seuls les étudiants ayant suivi un cours de mathématiques de 6 périodes par semaine en humanités avaient étudié les matrices. Il est donc utile de les aborder à nouveau dans ce cours.
Par contre, les matrices ne seront pas directement utilisées dans les autres cours de première candidature mais le seront dans la suite des études en biologie, notamment dans le cours de statistiques (voir § 2.2.2).

2) Faut-il présenter la théorie des applications linéaires sous-jacente au calcul matriciel ?

Il semble que les étudiants n'utiliseront les matrices, dans leur futur, que sous forme de tableaux (voir § 2.3.2). Une introduction à la théorie des matrices par le biais des espaces vectoriels et des applications linéaires nécessiterait un travail assez lourd, qui prendrait beaucoup de temps. Le professeur a donc choisi de se limiter à l'aspect « tableau de nombres » et à quelques manipulations élémentaires sur ces tableaux.

3. *Systèmes d'équations linéaires :*

Contenu :
On travaille avec des systèmes de dimension quelconque (carrés, rectangulaires). On ne réalise pas de traitement particulier des systèmes homogènes, des systèmes quelconques, ni de systèmes de Cramer. La méthode proposée pour résoudre ces systèmes est une « élimination de Gauss », en montrant que les éliminations successives permettent de conclure dans tous les cas (solution unique, infinité de solutions, absence de solution). On fait le lien entre les dimensions du système et le nombre de solutions.
Les deux objectifs de ce paragraphe sont, d'une part, que les étudiants puissent résoudre un système (au niveau calculatoire) et d'autre part, qu'ils puissent surtout résoudre des problèmes qui conduisent à une mise en équations (modélisation). Plusieurs exemples sont

traités dans le cours. Ceux-ci mettent l'accent sur l'importance de la recherche de sens, de concrétisation.

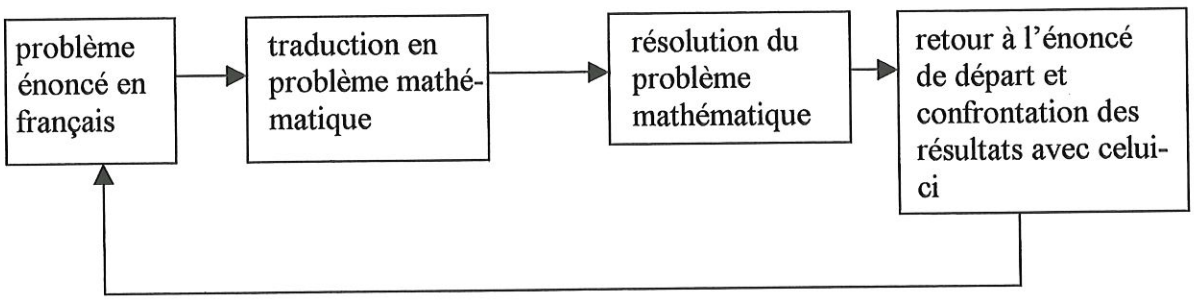
<u>Questions :</u>

1) Pourquoi choisir cette stratégie de résolution de systèmes, pourquoi initier les étudiants à la résolution numérique de systèmes d'équations linéaires ?

On n'utilise pas de programmes informatiques, mais les étudiants peuvent se rendre compte du caractère répétitif des opérations dans une méthode d'élimination et donc de la possibilité de programmer une telle méthode.

2) Pourquoi apprendre à résoudre des problèmes ?

Pouvoir résoudre des problèmes simples au moyen des mathématiques est très important en sciences de la vie. Les mathématiques constituent, en biologie, un outil, une aide à la modélisation de problèmes. Les étudiants sont confrontés au type de raisonnement suivant :



Tous les problèmes abordés dans le cours de mathématiques répondent à ce schéma. En voici un exemple, extrait du syllabus de mathématiques (Thiry, [23]) :

problème énoncé en français : **« Deux usines fabriquent chacune trois types de vélos pendant une période fixée. Pendant cette période,**
- la première usine fabrique 500 vélos de type 1, 400 de type 2 et 300 de type 3 ;
- la seconde usine fabrique 200 vélos de type 1, 100 de type 2 et 150 de type 3.
Pour cette fabrication, la première usine a des frais totaux de 5 millions et la seconde de 1,5 millions.
Sur la vente de tous ces vélos, la première usine doit réaliser un bénéfice de 1 million et la seconde de 600 000 francs.
Quel doit être le prix de vente de chacun de ces vélos pour réaliser ces objectifs ? »

Nous allons illustrer les différentes étapes du schéma :

traduction en problème mathématique : L'étudiant va devoir mettre toutes ces données sous forme d'équations mathématiques : premièrement définir les inconnues : x_1, x_2, x_3, les prix de vente respectifs de chaque type de vélo et deuxièmement, mettre en équations.

résolution du problème mathématique : résolution du système d'équations linéaires obtenu à l'étape précédente.

retour à l'énoncé de départ et confrontation des résultats avec celui-ci : Dans cet exemple, on arrive à une solution où x_3 n'est pas déterminée. Mais, x_1, x_2, x_3 représentent des prix de vente, il faut donc qu'ils soient des nombres réels positifs. Cette condition va entraîner des contraintes supplémentaires sur x_3. Sans cette restriction, toutes les solutions trouvées n'auraient pas eu de sens. L'étudiant doit également remarquer que dans cet exercice, on a choisi d'exprimer x_1, x_2 en fonction de x_3. On aurait tout aussi bien pu exprimer x_1, x_3 en fonction de x_2 ou x_2, x_3 en fonction de x_1. Les résultats auraient été équivalents.

4. Lien entre matrices et systèmes :

Contenu :
On apprend ici à écrire sous forme matricielle un système d'équations linéaires. On traite ensuite deux cas, celui d'un système carré et celui d'un système homogène. On ne parle pas de rang de matrice, de dimension de l'espace solution,...

Question :
Pourquoi ne pas présenter plus avant les liens entre matrices et systèmes d'équations (méthodes de résolution, existence de solutions, matrices particulières : symétriques,...) ?

Présenter ces aspects seraient trop « poussé » pour un cours de mathématiques de 45 heures destiné aux étudiants en sciences biologiques. Le choix a été fait de mettre l'accent sur d'autres aspects comme la modélisation qui apparaît plus utile dans le contexte des sciences de la vie. De plus, il n'y a pas assez de temps disponible pour aborder tous ces aspects.

2. Eléments de calcul vectoriel :

Contenu :
On apprend à décomposer un point en ses coordonnées cartésiennes et on définit précisément ce qu'est un vecteur. Les opérations algébriques de base sur les vecteurs et les propriétés de celles-ci sont présentées.
Ensuite on définit géométriquement et algébriquement le produit scalaire et on en donne les principales propriétés.
Enfin, on explique comment orienter l'espace et on définit algébriquement et géométriquement le produit vectoriel.

Question :
Pourquoi présenter un chapitre sur les vecteurs alors que le reste du cours traite plutôt d'analyse ?

Un cours de physique est présent dans le programme des cours de première candidature en biologie. L'étude des forces, abordée dans le cours de physique, requiert l'utilisation des vecteurs (voir § 1.2.3).
De plus, ceux-ci ont été étudiés en partie et à des degrés divers en humanités (voir § 1.4.2), selon le nombre d'heures de mathématiques suivi par l'étudiant. Il est donc bon de préciser les notions en rapport avec ce sujet.

3. <u>Les fonctions réelles élémentaires :</u>

Ce chapitre se divise en deux parties :

1. La notion de fonctions dans les sciences expérimentales :

Contenu :
On explique que les fonctions correspondent à des outils pour exprimer des relations entre variables. Beaucoup de lois scientifiques se formulent par des relations entre variables et la dépendance entre celles-ci peut parfois être traduite par une relation mathématique. On insiste sur le fait que, dans le cas de deux variables en dépendance mutuelle, une des variables sera choisie comme variable indépendante. L'autre variable, dépendante, est fonction de la variable indépendante. Ce choix est guidé par la façon dont le problème est posé.
Ensuite, on rappelle comment tracer un graphique, ce qui est souvent, dans la pratique, plus informatif qu'une table de nombres.
Enfin, on définit une fonction réelle, son domaine de définition et ses caractéristiques de croissance et décroissance.

2. Rappel de fonctions usuelles :

Contenu :
On rappelle ici les notions de droite et d'hyperbole : expression algébrique de la proportionnalité directe et inverse, équations et graphes de ces deux fonctions.
Ensuite, on termine par les fonctions polynomiales, utiles pour modéliser divers phénomènes expérimentaux et pour approximer d'autres fonctions plus difficiles à calculer.

Commentaires :
Ce second paragraphe constitue un rappel de notions étudiées en humanités. (voir § 1.4.2)

4. <u>Les dérivées de fonctions d'une variable réelle :</u>

Contenu :
La dérivée d'une fonction en un point est introduite au moyen du taux de variation. On définit tout d'abord le taux moyen de variation d'une fonction sur un intervalle et on en donne sa signification géométrique (tangente d'un angle). A partir du taux de variation moyen, on introduit le taux de variation instantané d'une fonction en un point. On insiste beaucoup sur le passage du taux moyen au taux instantané de variation. On interprète ensuite la dérivée de façon géométrique par le coefficient angulaire de la tangente à la courbe.
Ensuite, on apprend à calculer les dérivées de diverses fonctions. L'utilité des dérivées pour l'analyse d'une fonction réelle d'une variable réelle est montrée et puisque cette analyse nécessite la dérivée seconde, on définit les dérivées d'ordre > 1.
Enfin, une interprétation cinématique (utile en physique) de la dérivée est donnée. A nouveau, on montre la différence entre le taux moyen et le taux instantané de variation de l'espace et de la vitesse.

L'objectif principal de ce chapitre est de pouvoir utiliser toutes ces notions pour modéliser et résoudre des problèmes d'optimisation : déterminer le minimum et le maximum d'une fonction, ainsi que des problèmes liés au comportement d'une fonction : croissance et décroissance d'une fonction.

Commentaires :
On insiste tout particulièrement sur la définition de la dérivée au moyen du taux de variation moyen et instantané. Cette définition trouve d'avantage sa place dans le contexte des sciences de la vie.

5. Primitives et intégrales :

Contenu :
Un exemple de *cinématique* motive l'utilité des primitives et intégrales (Thiry, [23]) :

> **« On considère un mobile qui se déplace en suivant une trajectoire rectiligne et qui est soumis à une accélération constante de $5m/s^2$. A partir de cette information, on désire déterminer la vitesse de ce mobile à un instant t quelconque et la distance que le mobile a parcouru à l'instant t. »**
>
> **On sait que si e (t) représente la distance parcourue à l'instant t, v (t) = e'(t) et a (t) = v'(t) = e''(t). Connaissant e''(t), on doit donc trouver e'(t) et e (t). Cette opération qui consiste à déterminer une fonction dont on connaît la fonction dérivée est l'opération « inverse » de la dérivation. e (t) est appelée primitive de v (t).**

Cet exemple conduit naturellement à la définition de primitive. On apprend ensuite à déterminer toutes les primitives d'une fonction donnée par différentes techniques de calcul. Une interprétation géométrique des primitives est expliquée : pour une fonction réelle f définie sur [a, b], on s'intéresse à la fonction A(x), où x appartient à [a, b], qui représente l'aire déterminée par le graphe de f, l'axe horizontal et les droites verticales passant par les points de coordonnées (a, 0) et (x, 0). On montre que la fonction A(x) est dérivable en tout point x appartenant à]a, b[et est une primitive de la fonction f (x). Ensuite, en définissant $\int_a^b f(x)\,dx$ par A(b), on montre que $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f. Les propriétés de base de l'intégrale définie sont alors données.
Enfin, on calcule de façon approchée l'intégrale simple définie lorsqu'une primitive ne peut être obtenue. Cette approche constitue une introduction à l'intégration numérique.

Question :
Pourquoi ajouter au calcul de primitives et d'intégrales définies, le calcul numérique approché d'intégrales définies ?

Plus tard, les étudiants seront peut-être confrontés au calcul numérique d'intégrales et ils les détermineront au moyen d'outils, de programmes informatiques. L'introduction au calcul numérique d'intégrales permet de leur donner une idée de ce que ces programmes effectuent comme opérations.

6. Fonctions logarithmes et exponentielles :

Ce chapitre se divise en 2 grandes parties :

1. Les logarithmes :

<u>Contenu :</u>
Dans cette partie du cours, on traite de deux types de logarithmes : d'une part, les logarithmes népériens, d'autre part les logarithmes de base quelconque. Le logarithme népérien est défini à l'aide de la primitive de la fonction 1/x, celui de base quelconque au moyen du logarithme népérien. Leurs propriétés sont mentionnées, leur graphe est tracé et étudié. Les logarithmes, leurs propriétés et les échelles logarithmiques permettent de manipuler et de représenter des grands nombres, ce qui est utile dans des expériences de sciences de la vie.
Enfin, une motivation de leur utilisation est proposée au moyen des deux exemples « de la vie courante » qui suivent :

Les logarithmes sont utilisés notamment dans la mesure de l'intensité des séismes : l'échelle de Richter.

Les logarithmes sont également utilisés dans la mesure de l'intensité sonore : les décibels.

<u>Commentaires :</u>
On insiste sur le fait que la magnitude et le Bell sont définis au moyen d'un logarithme. En conséquence, déduire des comparaisons entre les intensités de deux séismes à partir de leurs magnitudes respectives, ou des comparaisons entre les intensités de deux sources sonores requiert quelques précautions. Il faut tenir compte du fait qu'on travaille avec une échelle logarithmique. On n'est donc plus confronté à une échelle linéaire. Les étudiants éprouvent des difficultés à comprendre ce rapport.

2. Les fonctions exponentielles et puissances :

<u>Contenu :</u>
Cette deuxième partie s'organise de la même façon que la première : les fonctions a^x, e^x (cas particulier de la fonction a^x) et puissances sont définies ; leurs propriétés sont données, leur graphe est tracé à l'aide d'une étude de chaque fonction et des exemples de leur utilisation sont relatés. On apprend aux étudiants à reconnaître le caractère croissant ou décroissant d'une fonction exponentielle ou puissance, à tracer rapidement et sans devoir recourir systématiquement à l'étude de la fonction, le graphe de celle-ci et à l'interpréter.

<u>Commentaires :</u>
Pouvoir reconnaître le caractère croissant ou décroissant d'une fonction exponentielle ou puissance, tracer rapidement son graphe sans devoir recourir systématiquement à l'étude de la fonction et interpréter celui-ci constituent des compétences que les étudiants en biologie doivent absolument acquérir. En effet, ils seront certainement confrontés à ce genre de cas de figure, car les fonctions exponentielles sont omniprésentes en biologie. (voir § 2.2)

<u>Question :</u>
Ces notions n'ont-elles pas déjà été abordées dans le secondaire ?

Malgré qu'elles aient déjà été étudiées (voir § 1.4.2), elles posent encore de nombreux problèmes aux étudiants. Il est donc nécessaire de les étudier à nouveau. De plus, elles sont abordées ici sous un aspect différent : la modélisation. Ce sont des fonctions incontournables en biologie.

7. Polynômes de Taylor :

Contenu :
Lorsque évaluer une fonction f (x) en un point x_0 est plus ou moins compliqué, il est intéressant de remplacer f (x) par une fonction plus simple et ne différant pas trop de la fonction f, tout au moins en les points proches de x_0. La classe des fonctions polynomiales se trouve parmi ces fonctions plus simples. On apprend donc dans ce chapitre à approximer des fonctions par des polynômes :
premièrement, de degré 1 (fonction linéaire affine), c'est à dire un polynôme dont le graphe ne s'éloigne pas trop de celui de f au voisinage d'un point donné x_0.
deuxièmement, on approxime par des polynômes de degré 2 afin d'être plus précis.
On améliore la qualité de l'approximation de f en considérant un polynôme de degré de plus en plus élevé, c'est à dire de degré n. Comme les approximations ne sont pas exactes, on commet une erreur. On estime alors celle-ci en utilisant la formule du reste (formule de Taylor). Des exemples sont donnés pour illustrer comment le polynôme de Taylor permet d'approcher une fonction en un point donné.

Question :
Pourquoi étudier les polynômes de Taylor ?

Le calcul numérique utilisant les polynômes de Taylor initie l'étudiant aux calculs de valeurs approchées.

8. Introduction aux équations différentielles du premier ordre :

Ce chapitre se décompose en trois grandes parties :

1. Introduction aux équations différentielles et définitions :

Contenu :
Au départ d'un exemple, on montre que des hypothèses expérimentales simples peuvent être formulées mathématiquement au moyen d'informations sur la dérivée. On peut par exemple, étudier la croissance d'une population à l'aide des équations différentielles. On démarre avec une hypothèse générale (souvent irréaliste). On affine ensuite le modèle en ajoutant des conditions à respecter en fonction du milieu environnant, des ressources de la planète,...On définit alors une équation différentielle du premier ordre.

2. Résolution de quelques équations différentielles simples :

Contenu :
On apprend à résoudre différents types d'équations différentielles linéaires simples du 1^{er} ordre par la méthode de séparation des variables.

Question :
Pourquoi se limiter à la résolution d'équations différentielles du premier ordre au moyen de la méthode de séparation des variables ?

Un cours plus complet est consacré aux équations différentielles en $2^{ème}$ candidature (voir § 2.2.2). Le but du cours de mathématiques de $1^{ère}$ candidature est de montrer, de faire sentir aux étudiants à quoi servent les équations différentielles, de leur donner une introduction aux équations différentielles par la résolution de quelques équations simples et de les ouvrir à la richesse du monde des équations différentielles.

3. *Illustration de l'importance des équations différentielles en biologie :*

Contenu :
Par des exemples choisis dans les sciences de la vie, on montre l'importance des équations différentielles en biologie. Elles permettent en effet de construire des modèles mathématiques décrivant divers phénomènes. Un exemple de modélisation simple de la *croissance d'une population* est traité en détail comme suit (Thiry, [23]) :

« On définit N(t) comme la taille au temps t d'une certaine population et N'(t) comme le taux de variation de N(t) au temps t. On va émettre plusieurs hypothèses concernant ce taux de variation et les traduire mathématiquement.

$1^{ère}$ hypothèse : **Le taux de variation de N(t) est la différence entre le taux d'augmentation (dû aux naissances et aux immigrations) et le taux de diminution (dû aux décès et aux émigrations). On suppose que la population est fermée sur l'extérieur, c'est à dire que l'immigration et l'émigration sont inexistantes.**
On exprime cela mathématiquement par

N'(t) = (taux de natalité au temps t) – (taux de mortalité au temps t)

$2^{ème}$ hypothèse : **Le taux de natalité au temps t est une fonction quadratique de N(t) exprimée par**

taux de natalité au temps t = $N(t)\,[a_0 - a_1 N(t)]$ avec $a_0, a_1 > 0$.

Par la représentation graphique du taux de natalité en fonction de la taille N de la population, on remarque que, pour N positif, ce taux croît jusqu'à ce que N atteigne une certaine valeur ($a_0 / 2a_1$), pour décroître ensuite. L'équation de l'hypothèse 2 exprime donc que pour une taille de population trop grande ($N > a_0 / 2a_1$), le taux de natalité diminue.

$3^{ème}$ hypothèse : **Le taux de mortalité au temps t est une fonction de N(t) exprimée par**

taux de mortalité au temps t = $N(t)\,[b_0 + b_1 N(t)]$ avec $b_0, b_1 > 0$.

A nouveau, par le graphe du taux de mortalité en fonction de la taille N de la population, on remarque que ce taux est croissant pour N positif.

En regroupant les trois hypothèses, on obtient une équation différentielle de type logistique ($y' = ky\,(a-y)$) dont on a appris à calculer la solution générale précédemment.

$$\begin{aligned} N'(t) &= N(t)\,[a_0 - a_1 N(t)] - N(t)\,[b_0 + b_1 N(t)] \\ &= N(t)\,[(a_0 - b_0) - (a_1 + b_1)\,N(t)] \end{aligned}$$ **qu'on peut réécrire sous la forme**

$$N'(t) = (a_1 + b_1)\, N(t)\, [((a_0 - b_0) / (a_1 + b_1)) - N(t)]$$ **donc**

$$N(t) = [(a_0 - b_0) / (a_1 + b_1)] \; / \; [1 + C\, e^{-(a_0 - b_0)t}]$$ **où C est une constante. »**

Commentaires :
Ce modèle nous permet, en remplaçant les paramètres par leur valeur respective, d'écrire une équation différentielle modélisant le taux de variation de la taille de la population pour ces valeurs de paramètres.

Dans cet exemple, le problème de l'ajustement des paramètres n'est pas du tout abordé. On n'explique pas non plus d'où proviennent les expressions des taux de mortalité et de natalité. On aboutit seulement au fait que la croissance d'une population peut s'exprimer au moyen d'une équation logistique.
En réalité, on pourrait approfondir l'étude des équations différentielles. Il serait possible d'étudier le comportement des solutions en fonction des paramètres, de travailler avec des équations plus complexes, non linéaires,...

Les modèles sont souvent utilisés à titre prédictif. Cependant, dans le cours de mathématiques, on développe peu l'aspect modélisation qui est pourtant un aspect important dans les sciences de la vie.

9. Les nombres complexes :

Contenu :
Les nombres complexes sont introduits dans le cadre de la résolution des équations du $2^{ème}$ degré à coefficients réels lorsqu'on doit calculer la racine carrée d'un nombre négatif. Pour pouvoir résoudre ces équations, on a introduit un nombre imaginaire i dont le carré serait -1. Ce chapitre du cours définit donc les nombres complexes, leurs propriétés et représente ceux-ci sous trois formes : la forme géométrique, la forme trigonométrique, la forme exponentielle. Il montre également le lien entre ses trois représentations, leur utilité et leurs propriétés.
Enfin, on apprend à calculer la racine carrée d'un nombre complexe et à résoudre les équations du type $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c réels et a distinct de 0).

Questions :

1) L'ensemble des étudiants n'a-t-il pas déjà étudié ce chapitre en humanités ?

En réalité, les nombres complexes constituent une matière propre au cours de mathématiques de 6 périodes par semaine (voir § 1.4.2). Une mise à niveau est donc indispensable pour tous les étudiants ayant suivi moins de 6 périodes par semaine.

2) Pourquoi étudier les nombres complexes ?

L'étude des nombres complexes est demandée par le professeur de mathématiques de $2^{ème}$ candidature. Ceux-ci lui sont utiles dans son cours traitant des équations différentielles. (voir § 2.2.2)

Commentaires :
Les opérations d'addition et de multiplication dans l'ensemble des nombres réels sont étendues à l'ensemble des nombres complexes sans insister sur les structures mathématiques sous-jacentes. En effet, le professeur pense qu'aborder ce type d'interprétation serait aller trop loin dans la théorie des nombres complexes. Cela ne correspond pas à l'esprit du cours. Celui-ci offre seulement une introduction, une ouverture aux nombres complexes, à visée essentiellement calculatoire. On n'aborde, par exemple, pas du tout la notion de fonction complexe.

10. Fonctions de plusieurs variables :

Ce chapitre se divise en 4 parties :

1. Introduction :

Contenu :
Il s'agit dans ce chapitre de généraliser les concepts et définitions concernant les fonctions d'une variable au cas des fonctions de plusieurs variables. L'utilité des fonctions de plusieurs variables se précise lorsqu'il s'agit d'analyser un phénomène avec plus de précision que ne le permettrait l'utilisation d'une seule variable. On a besoin de plus d'informations et donc de plus de variables pour les représenter. L'introduction des fonctions de plusieurs variables est impossible à éviter dans la modélisation.

Beaucoup de lois scientifiques s'expriment par des relations entre deux ou plusieurs quantités. Une motivation de l'utilité des fonctions de plusieurs variables est proposée au moyen d'un exemple tiré de la physiologie (Thiry, [23]) :

> **« Un paramètre important dans *l'étude de la perte de chaleur d'un animal* est la surface du corps de celui-ci. La géométrie complexe du corps d'un animal rend la mesure de cette surface difficile à obtenir. Néanmoins, il est possible de faire certaines mesures sur le corps d'un animal pour ensuite en calculer la surface. Les physiologistes ont ainsi obtenu une formule permettant de relier la surface du corps d'un animal à son poids. Si la surface S est exprimée en m² et le poids P en kg, la formule est**
>
> $S^3 = K^3 P^2$ **où K est une constante dépendant de l'animal considéré.**
>
> **Pour être plus précis dans l'analyse de la relation entre S, la surface du corps de l'animal et P, le poids de cet animal, on peut introduire un 3ème paramètre : la taille T (exprimée en cm) de l'animal (ou de l'homme). On obtient pour l'homme**
>
> $S = (0{,}007184)\, P^{0{,}425}\, T^{0{,}725}$ **où P est compris entre 20 et 110 kg et T est compris entre 100 et 200 cm.**
>
> **On peut alors calculer la surface du corps humain en fonction de sa taille et de son poids. S est une fonction de deux variables indépendantes P et T. »**

2. *Représentations graphiques :*

Contenu :
On définit une fonction de deux variables et ses modes de représentations : les courbes de niveau et le graphe.

Commentaires :
Des exemples de graphes de fonctions de deux variables sont donnés. Ils ont été réalisés au moyen de programmes informatiques. L'apprentissage de l'utilisation d'outils informatiques, d'une calculatrice graphique n'est pas présent dans le cours.

3. *Les dérivées partielles :*

Contenu :
Dans le cas d'une fonction d'une variable, on est confronté au calcul de sa dérivée. Ce concept devient dans le cas de fonctions de plusieurs variables, celui des dérivées partielles. On les définit, on en donne une interprétation géométrique et on apprend à les calculer.
Enfin, comme les dérivées partielles sont également des fonctions de plusieurs variables, elles peuvent donc être dérivées partiellement. On apprend donc à calculer des dérivées partielles du second ordre.

4. *Utilité des dérivées partielles :*

Contenu :
On montre l'utilité des dérivées partielles dans des petits problèmes de maximisation et minimisation locale pour des fonctions de deux variables. On travaille avec des fonctions simples, convexes. On ne traite pas du problème d'existence du minimum ou maximum. Quelques théorèmes sont énoncés mais pas démontrés.

Commentaires :
On ne traite pas du problème de l'existence d'un minimum ou d'un maximum car ce serait difficilement réalisable dans le temps imparti.

Questions :

1) Pourquoi s'arrêter au cas de fonctions de deux variables ?

Normalement, si l'étudiant a compris le passage du cas d'une fonction d'une variable à celui d'une fonction de deux variables, on peut espérer que la transition vers un nombre plus élevé de variables se fasse sans trop de problèmes.

2) Pourquoi ne traite-t-on pas de problèmes de modélisation dans ce chapitre ?

Il est vrai que ce genre d'exercices pourrait être ajouté puisqu'ils sont importants. Cependant, des questionnaires d'examens d'années antérieures et contenant ce type d'exercices ont été annexés à la fin du syllabus. Les étudiants ont donc la possibilité de s'y exercer.

1.2.2 le cours de chimie générale

Le cours de chimie générale (SCHI 1104 et SCHI 1145, 105 heures théoriques, G. Evrard et Z. Mekhalif) se base sur deux ouvrages : « cours de chimie physique » (Arnaud, [3]) et « chimie » (Griffe, [17]).

Pour nous familiariser avec le cours de chimie, nous avons pris connaissance des deux manuels : lecture des préfaces pour comprendre comment les livres devaient être utilisés et analyse des tables des matières et des index afin de dresser une liste des endroits où pouvaient apparaître des notions mathématiques. Malheureusement, cela ne nous donna guère d'informations. Cependant, même si les mathématiques ne figurent pas dans les index ni dans les tables des matières, elles sont pourtant bien présentes dans les ouvrages de chimie (un des manuels indique d'ailleurs, avant chaque chapitre, des pré-requis dont certains sont de type mathématique). Les mathématiques sont donc au service de la chimie.
Nous avons, dès lors, relevé page par page les concepts mathématiques apparaissant dans ces ouvrages. A la suite de ce relevé, il nous est apparu que les notions mathématiques les plus utiles à la compréhension du cours de chimie sont :

- les notions « simples » : règle de trois, pourcentage, puissance,...
- les dérivées
- les intégrales
- les logarithmes de base quelconque et népériens

(Ces notions sont développées plus en détails au § 1.2.4)

Grâce aux syllabi de mathématiques de première candidature, nous savions quelles notions sont abordées dans le cours de mathématiques. Nous pouvions alors classer tous les concepts mathématiques apparaissant dans ces ouvrages de chimie en deux catégories : ceux qui seront abordés dans le cours de mathématiques de première candidature biologie et ceux qui n'y figureront pas.

Nous avons relevé, dans le cours de chimie, l'apparition du symbole Δ, qui possède différentes appellations, comme : défaut de, variation de, imprécision, incertitude sur, différence entre produits et réactifs, différence d'états, écart, ... Autant d'appellations, utilisées selon le contexte, ne risquent-elles pas de semer la confusion chez les étudiants ?

1.2.3 le cours de physique expérimentale

Le cours de physique expérimentale se divise en deux parties. La première (SPHY 1105, F. Bodart) traite de la mécanique du solide. La deuxième (SPHY 1117, J. Darville) est centrée sur l'optique, l'électrostatique, l'électricité, l'électromagnétisme, la mécanique des fluides et la thermique.

Pour analyser la partie traitant de mécanique, nous nous sommes basée sur le syllabus du professeur (Bodart, [10]). Pour la deuxième partie, nous avons travaillé avec les notes de cours d'une étudiante. Une lecture attentive du syllabus et des notes a permis de dresser un relevé des concepts mathématiques intervenant dans ceux-ci. Il est ressorti de ce relevé que les notions mathématiques les plus utiles à la compréhension de ce cours sont :

- les notions « simples » : règle de trois, pourcentage, puissance,...
- la géométrie dans le plan
- la trigonométrie
- les vecteurs
- les fonctions réelles élémentaires
- les dérivées
- les intégrales
  (Ces notions sont développées plus en détails au § 1.2.4)

Comme précédemment, grâce au contenu du cours de mathématiques de première candidature, nous avons pu classer tous les concepts mathématiques relevés en deux catégories : ceux qui seront abordés dans le cours de mathématiques de première candidature et ceux qui n'y figureront pas.

Le symbole Δ est également présent dans ce cours de physique. Celui-ci possède à nouveau des significations différentes suivant le contexte dans lequel il est utilisé : variation de, portion déterminée (Δl), différence entre deux valeurs (deux grandeurs),... ce qui pourraient peut-être engendrer la confusion.

Lors de l'analyse du cours de physique, nous avons remarqué que, dans celui-ci, la différence entre un vecteur libre et un vecteur lié est prise en compte selon les besoins alors qu'elle n'intervient pas dans le cours de mathématiques de première candidature. Dans le cours de mathématiques, on travaille uniquement avec des vecteurs libres mais sans le signaler explicitement.
Dans le cours de mathématiques (Thiry, [23]), un vecteur correspond à un segment de droite orienté dans un système d'axes orthogonaux : l'origine du vecteur coïncide toujours avec l'origine O du système d'axes et les coordonnées de l'autre extrémité (P) du segment sont appelées composantes du vecteur. On identifie souvent un vecteur avec ses composantes cartésiennes, de sorte que l'on écrit $\overrightarrow{OP} = (a, b, c)$.

Commentaires :
Ceci montre que les vecteurs sont considérés dans le cours de mathématiques comme les éléments de l'espace vectoriel réel R^3. Cependant, les termes « espace vectoriel » n'y sont pas mentionnés explicitement.

Dans le cours de physique (Bodart, [10]), il arrive que les vecteurs soient assimilés à des forces telles que les caractéristiques de la force (point d'application, direction ou ligne d'action, sens, grandeur) sont aussi celles du vecteur lié : segment de droite orienté dont l'origine est le point d'application, la direction et le sens étant ceux du fil tendu équivalent à la force et dont la longueur représente la mesure F de la force.
Dans ce cas, l'origine du vecteur coïncide avec le point d'application de la force. Celui-ci ne se situe donc pas forcément à l'origine d'un système d'axes orthogonaux. Cela engendre alors des difficultés auprès des étudiants pour décomposer ce type de vecteur en ses composantes cartésiennes car elles ne correspondent plus aux coordonnées de l'extrémité du segment comme dans le cours de mathématiques. De plus, dans le cours de mathématiques, on n'insiste pas sur le calcul des composantes d'un vecteur.

1.2.4 relevé des concepts mathématiques abordés dans les cours de mathématiques, de physique et de chimie

Nous dressons ici la liste des **notions abordées dans le cours de mathématiques.** Le tableau ci-dessous précise pour chacune de ces notions son utilisation éventuelle dans les cours de physique et de chimie.

Remarque : Les notions importantes pour les cours correspondants sont indiquées en caractères imprimés majuscules.

Concepts abordés dans le cours de mathématiques	**Concepts présents dans le cours de physique ?**	**Concepts présents dans le cours chimie ?**
Calcul matriciel et systèmes d'équations linéaires :		
- Le symbole Σ :		
Définition.	oui	oui
Propriétés et utilisation.	oui	oui
- Les matrices :		
Définition et conventions de notations.	non	non
Addition et multiplication matricielles, notion de déterminant et de matrice inverse.	non	non
- Résolution de systèmes d'équations linéaires	non	non
- Utilisation des matrices dans les systèmes d'équations linéaires	non	non
Eléments de calcul vectoriel :		
- Vecteurs :		
Définition et représentation.	OUI	oui
- Opérations sur les vecteurs : addition et multiplication scalaire.	OUI	non
- Produit scalaire	OUI	non
- Produit vectoriel	OUI	non

Concepts abordés dans le cours de mathématiques	Concepts présents dans le cours de physique ?	Concepts présents dans le cours chimie ?
Fonctions réelles élémentaires :		
- Les fonctions : outil pour la relation entre variables :		
Définition et graphe d'une fonction.	OUI	oui
- Fonction de proportionnalité directe :la droite :		
Expression algébrique de la proportionnalité directe.	OUI	oui
Equation de la droite.	OUI	oui
Pente d'une droite.	OUI	oui
- Fonction de proportionnalité inverse : l'hyperbole :		
Expression algébrique de la proportionnalité inverse.	OUI	oui
Graphe de la fonction de proportionnalité inverse.	OUI	non
Equation générale d'une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux axes de coordonnées.	NON	non
- Les fonctions polynomiales :		
Définition.	OUI (parabole)	oui (parabole)
Définition des racines réelles d'un polynôme.	OUI	oui
Opérations sur les polynômes.	OUI	oui
Graphe de fonctions polynomiales.	OUI (parabole)	oui (parabole)

Concepts abordés dans le cours de mathématiques	Concepts présents dans le cours de physique ?	Concepts présents dans le cours chimie ?
Dérivées d'une fonction réelle :		
- Définition de la dérivée comme taux instantané de variation	OUI	OUI
- Calcul d'une dérivée	OUI	OUI
- Dérivée d'ordre >1	OUI	OUI
- Utilisation des dérivées pour l'analyse des variations d'une fonction réelle d'une variable réelle : extrema et concavité	OUI	OUI
- Interprétation : Interprétation géométrique de la dérivée en un point.	OUI	NON
Interprétation cinématique de la dérivée.	OUI	OUI
Primitives et intégrales :		
- Définitions de primitives et d'intégrales définies	OUI	OUI
- Calcul exact de primitives et d'intégrales définies	OUI	OUI
- Calcul approché de l'intégrale simple définie	NON	NON

Concepts abordés dans le cours de mathématiques	Concepts présents dans le cours de physique ?	Concepts présents dans le cours chimie ?
Fonctions logarithmes et exponentielles :		
- Le logarithme népérien (définition, calcul, propriétés, graphe)	oui	OUI
- Logarithmes de base « quelconque » (définition, calcul, propriétés, graphe)	oui	OUI
- Fonctions exponentielles (définition, calcul, propriétés, graphe)	oui	OUI
- Fonctions puissances (définition, calcul, propriétés, graphe)	oui	OUI
- Interprétation des fonctions logarithmes et exponentielles	oui	OUI
Polynômes de Taylor :		
- Définitions	non	non
- Utilisation des polynômes de Taylor pour le calcul approché de fonctions	non	non
Equations différentielles du premier ordre :		
- Définition	oui	oui
- Résolution de quelques équations différentielles simples	oui	oui

Concepts abordés dans le cours de mathématiques	**Concepts présents dans le cours de physique ?**	**Concepts présents dans le cours chimie ?**
Nombres complexes :		
- Définitions	non	non
- Représentation géométrique et forme trigonométrique	non	non
- Forme exponentielle des nombres complexes	non	non
- Addition et multiplication des nombres complexes	non	non
- Racine carrée d'un nombre complexe	non	non
- Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (a,b,c réels, a différent de 0)	non	non
Fonctions de plusieurs variables :		
- Définitions	oui	oui
- Représentations graphiques (graphe cartésien et courbes de niveau)	non	non
- Les dérivées partielles du premier et du second ordre	oui	oui
- Utilisation des dérivées partielles pour la détermination des maxima et minima d'une fonction de deux variables	oui	oui

Nous dressons ici la liste des **concepts mathématiques rencontrés dans le cours de physique ou de chimie mais non traités dans celui de mathématiques**.

Concepts non abordés dans le cours de mathématiques mais abordés dans le cours de physique ou de chimie	**Concepts présents dans le cours de physique ?**	**Concepts présents dans le cours chimie ?**
Notions « simples » : règle de trois, pourcentage, puissance,…	OUI	OUI
Géométrie dans le plan : angles, parallélisme, perpendicularité, triangles semblables, isocèles, …	OUI	oui
Géométrie dans l'espace : représentation et vision de volumes dans l'espace	oui	oui
Vecteurs : décomposition d'un vecteur dans une base	OUI	oui
Trigonométrie : sin x, cos x, tg x, cotg x : graphes et propriétés, formules de trigonométrie, relations trigonométriques dans le triangle rectangle, projections, périodicité, cercle trigonométrique…)	OUI	oui
Limites : → 0, → constante, → ∞ ; continuité) **Indéterminations :** constante/0, constante/∞, ∞/constante,…)	oui oui	oui oui

Concepts non abordés dans le cours de mathématiques mais abordés dans le cours de physique ou de chimie	Concepts présents dans le cours de physique ?	Concepts présents dans le cours chimie ?
Equations aux dérivées partielles : - Définition - Résolution	 non non	 oui non
Intégrales impropres : - Définition - Calcul **Intégrales de volumes et surface :** - Définition - Calcul	 oui non oui non	 oui non oui non
Statistiques et probabilités : moyenne, densité, distribution, fréquence, …	oui	oui
Démonstration par l'absurde	oui	non

Grâce au premier type de tableau, nous pouvons observer que les notions abordées dans le cours de mathématiques et qui semblent les plus « importantes » pour les cours de physique et de chimie de première candidature sont les suivantes :

- le calcul vectoriel
- les fonctions réelles élémentaires
- les dérivées d'une fonction réelle
- les intégrales et primitives
- les fonctions logarithmes et exponentielles

Grâce au deuxième type de tableau, nous pouvons noter que les notions non abordées dans le cours de mathématiques mais qui semblent « importantes » pour les cours de physique et de chimie de première candidature sont les suivantes :

- les notions « simples » : règle de trois, pourcentage, puissance,…
- la géométrie dans le plan
- la trigonométrie

Nous distinguons également que des notions abordées dans le cours de mathématiques ne sont pas « nécessaires » au cours de physique ni au cours de chimie de première candidature. Ces notions sont les suivantes :

- l'algèbre linéaire (matrices, résolution de systèmes d'équations linéaires, utilisation des matrices dans les systèmes d'équations linéaires)
- les polynômes de Taylor
- les nombres complexes

Enfin, nous pouvons remarquer que certains concepts relevés dans le « non abordé en mathématiques en première candidature » sont « simples » (règles de trois, rapports, puissances,…). Mais nous verrons plus loin que les étudiants éprouvent parfois des difficultés avec ces « notions simples ». Il est donc bon de les relever.
D'autres concepts se trouvent à la fois dans le « traité » et le « non traité » comme les intégrales, les vecteurs. L'explication de cela vient du fait que les intégrales ont été abordées lors du cours de mathématiques de première candidature mais on y a seulement étudié les intégrales simples définies, alors que d'autres types d'intégrales ont été mentionnées en chimie et en physique (même si on ne les résout pas mathématiquement). Dans le cours de mathématiques, on n'insiste pas sur la décomposition d'un vecteur en ses composantes alors qu'en physique, ce concept est utile.

1.3 Questionnements

A la suite de l'analyse des cours de mathématiques, de physique et de chimie, nous nous sommes posée deux types de questions :

- d'une part, des questions d'ordre général qui concernent le choix des matières à placer dans le cours de mathématiques, leurs articulations entre elles et avec les autres cours.
- d'autre part, des questions concernant plus précisément la didactique des mathématiques.

Pour tenter de répondre à ces interrogations, nous avons

- rencontré quelques enseignants en physique et en chimie des Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix à Namur. Ceux-ci ont aimablement accepté de participer à une « interview ».
- consulté le programme de mathématiques de l'enseignement secondaire 3ème degré de transition.

Mme Ravet a répondu à nos questions portant sur le cours de chimie.
Pour le cours de physique, Mr Bodart et Mr Darville ont accepté de nous recevoir pour débattre de leur cours respectif en première candidature biologie.

Par ailleurs, nous avons également joint Mme Frising, maître en didactique en physique. Celle-ci a réalisé un CDRom dont l'objectif est d'aider les étudiants en fin de cycle secondaire à réussir le passage vers des études supérieures de type scientifique, universitaires ou non. Ce CD traite de mécanique : calcul vectoriel, trigonométrie, cinématique,...(outils indispensables en mathématiques). Des exercices interactifs sont également proposés aux étudiants. Il s'agit, en fait d'une révision du secondaire, c'est à dire une précision des notions physiques et mathématiques qui y sont étudiées. Les initiateurs de ce CD ont choisi la mécanique car c'est le point de départ des cours de physique dans le supérieur.

Mme Frising donne également des travaux pratiques et dirigés en physique. Elle connaît donc bien les difficultés que rencontrent les étudiants dans cette matière et a pu en particulier nous éclairer sur l'utilisation des vecteurs dans l'enseignement de la physique.

Outre l'éclairage apporté par nos interlocuteurs privilégiés, nous souhaitions également connaître l'avis des étudiants de première candidature en biologie concernant le cours de mathématiques en première candidature biologie aux Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix à Namur. Nos questions portaient sur deux aspects, à savoir

- la transition humanités-université concernant le cours de mathématiques
- le cours de mathématiques de première candidature

Quelques étudiants suivant ce cours, ont accepté de répondre à nos interrogations.

Dans les paragraphes qui suivent, nous reprenons nos interrogations et présentons, pour chacune de celles-ci, une synthèse des réponses fournies par les personnes interrogées.

1.3.1 interview d'une enseignante universitaire en chimie

Cette rencontre a permis de répondre aux questions suivantes :

<u>Questions :</u>
Les étudiants abordant une première candidature en biologie sont-ils suffisamment préparés en humanités pour aborder le cours de chimie de première candidature biologie ?

Les étudiants abordant une première candidature en biologie éprouvent-ils plus ou moins de difficultés selon le nombre d'heures de mathématiques qu'ils ont suivi en humanités ?

<u>Réponse de l'enseignante :</u>

En général, les étudiants abordant une première candidature sont suffisamment préparés pour aborder le cours de chimie. Des différences de niveau existent entre eux, en début d'année. Cela est dû, à la fois, au nombre d'heures de sciences et de mathématiques qu'ils ont suivi auparavant, aux professeurs de sciences et de mathématiques qu'ils ont eu en humanités, aux matières approfondies de façon différente,…Mais en se mettant au travail, ils doivent pouvoir se débrouiller et démarrer. Jusqu'en décembre, un impact du secondaire est ressenti. Les cours sont justement adaptés à ces différences de niveaux ; ils doivent intéresser tout le monde, tout en remettant les étudiants sur le même pied. Habituellement, les carences sont rattrapées fin décembre mais bien sûr, certains éprouvent encore des difficultés.

<u>Question :</u>
Comment les professeurs de chimie en première candidature biologie considèrent-ils le cours de mathématiques de première candidature comparé à leur propre cours ? Est-il utile, nécessaire, indispensable,… ?

<u>Réponse de l'enseignante :</u>

Le cours de mathématiques est considéré comme un cours au service de la chimie (tout comme celle-ci est au service de la biologie) mais l'enseignement de la chimie en première candidature ne demande pas énormément de notions mathématiques (règle de trois, dérivées, intégrales, logarithmes, exponentielles, équations,…). Celles-ci correspondent à des concepts d'un niveau « humanité ». De plus, certaines sont revues au cours de mathématiques. Et si une notion plus élaborée est nécessaire, le cours de chimie l'approche sans trop la développer. Par exemple, les étudiants ne doivent pas savoir comment résoudre l'équation de Schrödinger (équations aux dérivées partielles du deuxième ordre). Les professeurs en donnent la solution et ne présentent sur ce sujet que ce qui leur est nécessaire.

Question :
Quelles sont les principales difficultés d'ordre mathématique que rencontrent les étudiants en biologie dans le cours de chimie ?

Réponse de l'enseignante :

Les étudiants éprouvent des difficultés avec des notions simples, parfois même avec des concepts introduits dans l'enseignement primaire, comme la règle de trois. Un rappel est souvent nécessaire pour que la notion utilisée revienne à leur esprit.

Mais une des difficultés majeures des étudiants est la modélisation de problèmes, c'est à dire : à partir d'un problème énoncé en français, ils doivent pouvoir traduire ce problème en un problème mathématique (déterminer les inconnues et mettre le problème sous forme d'équations mathématiques), résoudre le problème mathématique, revenir à l'énoncé (en français) de départ et confronter les résultats obtenus avec celui-ci en faisant preuve de bon sens. En général, la partie résolution « mathématique » ne pose pas de problèmes. C'est la traduction du problème (énoncé en français) en mathématiques qui entraîne des difficultés. Mais comme il s'agit du point de départ, si l'étudiant est bloqué au début du problème, il ne peut pas arriver à le solutionner. L'interprétation du résultat est également difficile, même pour les étudiants ayant des facilités intellectuelles. Par exemple, dans les équilibres, les étudiants doivent résoudre une équation du 2ème degré, ce qui ne leur occasionne aucun problème. Mais seule une des deux solutions a un sens « chimiquement » et la trouver engendre alors des difficultés. Les étudiants ne se rendent d'ailleurs pas toujours compte de ce problème de modélisation. Ils pensent qu'ils savent résoudre les problèmes mathématiquement et que le reste se fera sans problème. Mais ils se retrouvent bloqués. Il faut qu'ils prennent conscience qu'une solution à leur problème serait de faire et refaire des exercices, en commençant par ceux qui ont été fait aux cours, puis par des exercices similaires,… Ce type d'exercices est très important car il permet de motiver la raison de l'étude d'une matière en en montrant ses applications. De plus, au cours de leurs études en biologie et après celles-ci, les étudiants seront fréquemment confrontés à des mises en situation,…Evidemment, ces exercices ne doivent pas venir trop tôt car la résolution mathématique doit d'abord être maîtrisée avant de les aborder.

Un autre problème est la signification des concepts. Par exemple, les étudiants savent calculer une dérivée mais ne connaissent pas sa signification (variation de la concentration en fonction du temps). Ils ne connaissent pas toujours le lien « dérivée-intégrale ».

Question :
Y a-t-il une cohérence et une concordance dans le temps entre le cours de mathématiques et le cours de chimie ?

Réponse de l'enseignante :

Comme le cours de chimie ne demande pas trop de concepts mathématiques élaborées, une cohérence existe entre le cours de mathématiques et celui de chimie. Il n'y a pas de notion abordée en chimie avant qu'elle ne soit étudiée en mathématiques. Les logarithmes apparaissent en chimie en janvier et sont revus en mathématiques à la même époque. Les dérivées se présentent en avril en chimie et sont traitées début novembre en mathématiques.

<u>Question :</u>
Le contenu du cours de mathématiques recouvre-t-il suffisamment les notions nécessaires au cours de chimie ?

<u>Réponse de l'enseignante :</u>

Les professeurs et assistants n'émettent pas le souhait que le professeur de mathématiques en première candidature biologie développe d'avantage certaines matières du cours de mathématiques. Ils ne relèvent pas d'incohérences,... mais chacun reste centré sur son cours, ce qui a pour effet que les étudiants ne font peut-être pas toujours le lien entre des notions similaires présentes dans des cours différents.

<u>Question :</u>
Ne serait-il pas plus astucieux d'utiliser le temps consacré à étudier le calcul matriciel, les polynômes de Taylor, les nombres complexes... pour étudier d'autres sujets comme la trigonométrie, la géométrie, qui semblent utiles en première candidature biologie ?

<u>Réponse de l'enseignante :</u>

Les professeurs ne jugent pas utile que l'on fasse de rappels sur les limites, la trigonométrie, la géométrie,... dans le cours de mathématiques de première candidature. Les sessions préparatoires, les séances de monitorat,... sont prévues pour rappeler ces notions et ils estiment que ces révisions sont suffisantes.

<u>Question :</u>
Certains concepts non abordés en mathématiques en première candidature, mais présents dans le cours de chimie (voir § 1.2.4) ne posent-ils pas de problèmes de compréhension aux étudiants ?

<u>Réponse de l'enseignante :</u>
Dans le cours de chimie, le professeur ne résout pas toujours tous les problèmes mathématiques. Quand une notion est jugée « trop compliquée » pour la compréhension des étudiants, le professeur la contourne. Ce n'est donc pas grave si cette notion n'a pas été étudiée dans le cours de mathématiques.

<u>Question :</u>
Quels concepts mathématiques seront utiles aux étudiants durant la suite de leurs études en biologie et après celles-ci ? A quels types de problèmes seront-ils le plus souvent confrontés ?

Réponse de l'enseignante :

C'est dans la suite de leurs études en biologie, que les étudiants seront d'avantage confrontés aux mathématiques. Ils auront en effet un cours de statistiques en deuxième candidature, d'avantage de mathématiques dans le cours de biologie,... Durant tout leur parcours, les étudiants seront confrontés à des mises en situation, à des problèmes de modélisation.

Question :
Les différentes appellations d'un même symbole (par exemple le symbole Δ) dans les divers cours et au sein d'un même cours ne perturbent-elles pas les étudiants ?

Réponse de l'enseignante :

Les différentes appellations du symbole Δ ne semblent pas perturber les étudiants mais ils éprouvent plutôt des difficultés à comprendre la différence entre Δ et d, c'est à dire Δ : grandeur macroscopique (différence de deux grandeurs) et d : grandeur microscopique.

1.3.2 interview d'enseignants universitaires en physique

Nous présentons une synthèse de leurs réponses :

<u>Question :</u>
Les étudiants abordant une première candidature en biologie sont-ils suffisamment préparés en humanités pour aborder le cours de physique de première candidature biologie ?

<u>Réponse des enseignants :</u>

Les étudiants ayant suivi un cours de 4 ou 6 périodes de mathématiques en humanités sont suffisamment préparés (aussi bien qu'il y a 10-20 ans) en mathématiques pour aborder le cours de physique. Et même s'il s'est produit des changements dans le secondaire ces dernières années, les difficultés éventuelles constatées restent souvent les mêmes.

<u>Question :</u>
Les étudiants abordant une première candidature en biologie éprouvent-ils plus ou moins de difficultés selon le nombre d'heures de mathématiques qu'ils ont suivi en humanités ?

<u>Réponse des enseignants :</u>

Le quota d'heures de mathématiques en humanités est un critère important (- d'heures, + de difficultés) mais il peut être relativisé par d'autres facteurs tout aussi déterminants. En pratique, tout dépend du professeur de mathématiques que les étudiants ont eu en humanités, du cours qu'ils ont suivi, du niveau de la classe, de l'étudiant lui-même,...Tout cela entraîne des différences de niveau. Ce qui compte, c'est la rigueur, les capacités que les étudiants ont acquises en humanités par les mathématiques et les autres cours.

<u>Question :</u>
Comment les professeurs de physique en première candidature biologie considèrent-ils le cours de mathématiques de première candidature comparé à leur propre cours ? Est-il utile, nécessaire, indispensable,... ?

<u>Réponse des enseignants :</u>

Le cours de mathématiques est bien sûr déterminant pour la physique. C'est un outil indispensable au service de la physique, même si celle-ci ne demande pas beaucoup de notions mathématiques.

<u>Question :</u>
Quelles sont les principales difficultés d'ordre mathématique que rencontrent les étudiants en biologie dans le cours de physique ?

<u>Réponse des enseignants :</u>

Les étudiants éprouvent souvent des difficultés avec des notions simples et qu'ils ont étudiées en humanités comme la trigonométrie, la géométrie plane,.... Le problème est qu'ils les ont oubliées. Ils ont encore un souvenir du vocabulaire mais ne savent plus ce que celui-ci représente,...Des rappels sont donc nécessaires et c'est chose faite dans les cours préparatoires, les séances de monitorat,...Il existe même des syllabi de révision considérés comme pré-requis pour ceux qui n'ont pas eu la possibilité de suivre les cours préparatoires,...Toutes ces opportunités sont suffisantes. Il n'est donc pas nécessaire de revoir ces matières au cours de mathématiques.
Le problème est que les étudiants ayant besoin de ces rappels ne prennent pas la peine d'en profiter. Ils ne font pas l'effort d'aller aux séances de monitorat, de lire les syllabi de rappels,...Il arrive aussi, quelques fois, que les plus faibles n'osent pas demander de l'aide. Les étudiants doivent prendre conscience qu'à l'université ce que le professeur leur enseigne n'est parfois pas suffisant, ils doivent s'investir au-delà.

Un autre obstacle rencontré par les étudiants est la modélisation de problèmes : il faut avoir un esprit d'utilisateur. Les étudiants éprouvent de grandes difficultés à traduire en langage mathématique un problème formulé en français, à résoudre le problème mathématique en utilisant les formules adéquates, à revenir au problème énoncé en français et à confronter les résultats obtenus avec celui-ci en vérifiant s'ils sont cohérents. La traduction en mathématiques du problème énoncé en français et la vérification de la cohérence de la solution posent de gros problèmes. Les étudiants n'utilisent pas leur bon sens, leur logique. De plus, dans des situations mathématiques « simples », dès que le contexte du problème est modifié : paramètres, variables, repères différents,... les étudiants sont perdus. Pourtant, dans leur « avenir en biologie », c'est ce à quoi ils seront confrontés. Ils ne seront jamais face à des situations semblables deux fois de suite.

La capacité d'abstraction des étudiants n'est pas suffisamment développées, ils ne comprennent pas toujours à quoi correspondent concrètement les concepts étudiés ; ils ne se représentent pas les notions. Ils ne voient pas leur sens. Cette difficulté pourrait se justifier par le fait que, à une époque, en humanités, l'abstraction et l'intuition se sont perdues. Actuellement, on semble y revenir.

Enfin, les étudiants ne s'habituent pas facilement à la « méthode universitaire ». Les professeurs avancent plus rapidement dans la matière. Ils commencent souvent directement par enseigner de la nouvelle matière. En exercices, un exemple d'un type est abordé et ensuite, les étudiants doivent traiter un autre exercice tout à fait différent du premier. Les énoncés des exercices changent de contexte. Les étudiants ne sont plus « drillés » comme en humanités où plusieurs exercices étaient réalisés avec des énoncés semblables,... Les humanités ne préparent pas suffisamment à cette méthode de travail. Une fois que les étudiants ont raté le départ, ils éprouvent des difficultés à rattraper le train en marche. Les étudiants ne font pas non plus toujours l'effort de faire et de refaire leurs exercices. Cela serait pourtant une des solutions à leurs problèmes.

A l'université, il faut s'investir : il faut pouvoir faire le lien entre différentes matières, remarquer les notions semblables,...

Question :
Y a-t-il une cohérence et une concordance dans le temps entre le cours de mathématiques et le cours de physique ?

Réponse des enseignants :

Une cohérence existe entre le cours de physique et celui de mathématiques, même si celui-ci ne poursuit pas les mêmes objectifs : en physique, les mathématiques sont au service du cours (même si parfois les physiciens ne sont pas toujours très rigoureux avec les mathématiques) tandis qu'en mathématiques le professeur enseigne les mathématiques pour les mathématiques mais en gardant à l'esprit qu'elles vont servir aux autres cours et donc qu'elles doivent y être adaptées.

Question :
Le contenu du cours de mathématiques recouvre-t-il suffisamment les notions nécessaires au cours de physique ?

Réponse des enseignants :

Les professeurs de physique ne souhaitent pas de grands changements dans le cours de mathématiques. Il y a suffisamment d'applications concrètes des mathématiques dans le cours de physique mais il faut que les étudiants se rendent compte du lien entre les deux matières. Mr Bodart relève qu'il y a peut-être une amélioration à apporter dans le cours de mathématiques concernant les fonctions de plusieurs variables. Il serait peut-être bon de voir ce chapitre un peu plus tôt dans l'année et de manière un peu plus approfondie. Mais il est conscient que le temps manque et que ce serait au détriment d'autres choses.
Certains manuels d'enseignement des mathématiques aux étudiants en sciences de la vie, ne consacrent d'ailleurs même pas un chapitre aux fonctions de plusieurs variables. Pourtant elles sont utiles en physique.

Mr Darville, quant à lui, fait remarquer que des intégrales de surface,... sont abordées en physique et pas en mathématiques mais que les étudiants ne doivent pas réellement les calculer. Elles représentent plutôt des intégrales formelles à prendre telles quelles. Et donc cela ne devrait pas leur poser de problèmes. Il serait également opportun de revoir les projections sur les axes dans le cours de mathématiques.

Question :
Ne serait-il pas plus astucieux d'utiliser le temps consacré à étudier le calcul matriciel, les polynômes de Taylor, les nombres complexes ... pour étudier d'autres sujets comme la trigonométrie, la géométrie, qui semblent utiles en première candidature biologie ?

Réponse des enseignants :

En réalité, la géométrie, la trigonométrie ont été étudiées en humanités et n'ont donc plus besoin d'être revues. Néanmoins, les séances de monitorat sont prévues pour les étudiants qui souhaiteraient des rappels.

Question :
Certains concepts non abordés en mathématiques en première candidature, mais présents dans le cours de physique (voir § 1.2.4) ne posent-ils pas de problèmes de compréhension aux étudiants ?

Réponse des enseignants :

Une chose curieuse est que les étudiants éprouvent des difficultés avec des matières mathématiques « simples », mais pas avec des notions plus élaborées, qui sont approchées dans le cours de physique et pas dans celui de mathématiques, comme les intégrales de surface,... Ils ne réagissent pas à cela. Ils acceptent l'apparition de ces notions plus élaborées sans poser de questions.

Question :
En première candidature en biologie, certaines des notions abordées dans le cours de physique ne sont pas reprises dans celui de mathématiques. Ces notions seront-elles étudiées plus tard ? Ou bien avaient-elles déjà été abordées en humanités ?

Réponse des enseignants :

La plupart des concepts utilisés en physique proviennent des humanités ou ont été abordés lors du cours de mathématiques avant d'intervenir en physique. Par exemple, Mr Bodart a besoin de calculer des intégrales avant qu'elles ne soient étudiées en mathématiques mais il s'agit uniquement d'intégrales que les étudiants ont appris à calculer en humanités. Le mode opératoire est connu et cela ne pose donc pas trop de problèmes.

Questions :
Pourquoi étudier le calcul matriciel, les nombres complexes, les polynômes de Taylor, dans le cours de mathématiques de première candidature en biologie, si ces notions ne sont pas utiles dans les autres cours de première candidature en sciences biologiques ?

Quels concepts mathématiques seront utiles aux étudiants dans la suite de leurs études en biologie et après celles-ci ? A quels types de problèmes seront-ils le plus souvent confrontés ?

Réponse des enseignants :

Des notions comme les matrices, les nombres complexes,... ne sont pas utilisées en physique mais les professeurs trouvent qu'il est bon de les étudier en première

candidature car après il n'y a pas de possibilité de le faire, le cours de mathématiques de deuxième candidature étant centré sur les équations différentielles. Les professeurs pensent que ces notions seront utiles aux biologistes dans leur futur : les nombres complexes pour le cours d'équations différentielles,...
La modélisation de problèmes leur sera également indispensable.

Questions :
Comment les physiciens travaillent-ils avec les vecteurs ?
Les différentes définitions d'un vecteur perturbent-elles les étudiants ?(voir § 1.2.3)

Réponse des enseignants :

Les professeurs de physique répondent de concert, que la question des vecteurs n'est pas un problème. La physique élude certaines notions mathématiques. Pour les professeurs, ce qui compte concernant les vecteurs, c'est leur direction, leur sens, leur grandeur et pas qu'ils aient leur origine à l'origine du système d'axes comme dans le cours de mathématiques. Les vecteurs représentent souvent des forces et ont donc, dans ce cas, leur origine située au point d'application de la force. Mais cette différence de définition ne pose pas de problèmes aux physiciens, ni aux étudiants d'ailleurs. Ceux-ci ne se rendent d'ailleurs certainement pas compte de cette différence et c'est dommage. En fait les physiciens considèrent l'équipollence (relation existant entre deux ou plusieurs vecteurs de même grandeur, parallèles, et de même sens) des vecteurs : un vecteur non issu de l'origine est « équivalent » à un vecteur parallèle, translaté, de même sens et de même grandeur que le premier mais issu de l'origine. C'est comme s'ils déplaçaient les axes parallèlement aux premiers pour que le vecteur soit à l'origine. Ensuite, ils travaillent comme les mathématiciens sur les vecteurs : produit scalaire, somme, décomposition,... Une remarque dans le cours de mathématiques à la fin du chapitre sur les vecteurs, pour marquer l'analogie, serait peut-être une bonne chose mais il ne faut pas insister pour ne pas engendrer des perturbations chez les étudiants alors qu'il ne semblait pas y avoir de problèmes.

Question :
Les différentes appellations d'un même symbole (par exemple le symbole Δ) dans les divers cours et au sein d'un même cours ne perturbent-elles pas les étudiants ?

Réponse des enseignants :

Au niveau des notations, Δ représente une grandeur macroscopique : une différence entre deux valeurs tandis que d est une grandeur microscopique : grandeur infinitésimale. Pour les physiciens, Δ et d sont des inventions des mathématiciens. Les étudiants ne réagissent pas aux différentes appellations de Δ mais par contre, ils nomment parfois « d » comme une grandeur « infinidécimale » au lieu d'infinitésimale. Ils ne saisissent donc pas bien le sens de cette notation.

1.3.3 interview d'étudiants de première candidature en biologie

Une discussion avec des étudiants de première candidature en sciences biologiques aux Facultés de Namur nous a permis de répondre aux questions suivantes :

<u>Question :</u>
Saviez-vous que vous devriez suivre un cours de mathématiques en première candidature biologie? Comment l'avez-vous appris ?
Cela a-t-il influencé votre choix du nombre d'heures de mathématiques à suivre durant le dernier cycle de vos études secondaires ? Pourquoi ?

<u>Réponse des étudiants :</u>

L'existence d'un cours de mathématiques en première candidature biologie fut connue par la plupart des étudiants juste avant de s'inscrire aux Facultés, d'autres le savaient déjà en fin d'humanités. Cependant, cela ne les influença pas dans le choix du nombre d'heures de mathématiques en fin d'humanités. D'autres options, généralement scientifiques, furent d'abord privilégiées. Ensuite, en fonction du temps restant disponible dans l'horaire, un cours de mathématiques de 4, 6 ou 8 périodes a été suivi par l'étudiant.

<u>Question :</u>
Avez-vous le sentiment d'avoir été suffisamment préparés en humanités pour aborder les cours de première candidature en biologie et plus particulièrement celui de mathématiques ? Expliquez.

<u>Réponse des étudiants :</u>

Les étudiants s'estiment suffisamment préparés en humanités.
Qu'ils aient suivi en fin d'humanités 4 périodes de mathématiques par semaine ou d'avantage, n'influence pas selon eux la qualité de la préparation. Bien sûr, les étudiants ayant travaillé 6 ou 8 heures de mathématiques par semaine ont étudié plus de notions ou plus de détails. Mais ceux qui n'ont suivi que 4 heures, n'éprouvent pas plus de difficultés. Ils font face en première candidature à d'avantage de nouvelles notions mais celles-ci sont abordables.
En ce qui concerne les cours scientifiques, une formation de 3 heures de physique, 3 heures de chimie et 3 heures de biologie constitue une bonne base. Toutefois, il y a moyen de se débrouiller en ayant suivi moins d'heures de sciences. Mais dans ce cas, il faut alors montrer une volonté supérieure pour s'en sortir.

<u>Question :</u>
Avez-vous éprouvé des difficultés à vous adapter à l'enseignement universitaire (cours plus rapides, moins de répétitions, moins d'exercices,...) ? Expliquez.

<u>Réponse des étudiants :</u>

La transition humanités-université n'est pas aisée. Les étudiants éprouvent des difficultés à trouver leur rythme de travail. Le fait qu'il n'y ait plus d'échéances, d'interrogations fréquentes leur pose également quelques problèmes d'organisation.

Question :
Le cours de mathématiques en première candidature biologie est-il cohérent (concernant les notations, la théorie, la continuité,...) par rapport à celui étudié en humanités ? Expliquez.

Réponse des étudiants :

Les étudiants n'émettent pas de remarques particulières à ce sujet.

Question :
Comment qualifieriez-vous le cours de mathématiques en première candidature biologie (très difficile, moyen, facile, très facile,...) ? Pourquoi ?

Réponse des étudiants :

Les étudiants considèrent le cours de mathématiques en première candidature comme un cours de difficulté moyenne. Ils éprouvent surtout des difficultés avec des problèmes de modélisation, de traduction en langage mathématique de problèmes formulés en français. La résolution mathématique, quant à elle ne leur pose pas de problème. C'est le démarrage, la traduction du français en mathématiques qui est difficile.

Question :
Comment percevez-vous le cours de mathématiques en première candidature biologie (attrait, peur, dégoût,...) ? Expliquez.

Réponse des étudiants :

Les étudiants n'éprouvent aucun attrait pour le cours de mathématiques. Ils ne sont pas « matheux » disent-ils. Ils n'étudient pas les mathématiques pour les mathématiques. Cependant, ils se rendent compte qu'elles peuvent leur apporter une certaine rigueur.

Question :
Trouvez-vous les matières supposées connues par l'enseignant en mathématiques en première candidature, beaucoup trop nombreuses, trop nombreuses, bonnes, sous estimées ? Pourquoi ?

Réponse des étudiants :

Les étudiants trouvent que les matières supposées connues par l'enseignant sont bien évaluées. De plus, à peu près tous les concepts sont revus depuis le départ sauf les limites. Les éventuelles notions oubliées sont donc en général rappelées pour tout le monde.

Question :
Trouvez-vous que le professeur de mathématiques en première candidature passe trop vite sur certains concepts ? Expliquez.

Réponse des étudiants :

Non, il existe une bonne gestion du temps et des matières.

Question :
L'exposé de l'enseignant en mathématiques en première candidature est-il assez clair, précis,... ? Pourquoi ?

Réponse des étudiants :

L'exposé des notions est très clair et précis car en général, les notions sont expliquées depuis le départ ou révisées.

Question :
Pourquoi imposer un cours de mathématiques en biologie ? Que vous apportent les mathématiques en première candidature ? Quelles sont vos attentes par rapport au cours de mathématiques ? Expliquez.

Réponse des étudiants :

Les mathématiques apportent de la rigueur et une méthode de raisonnement, ce qui semble correspondre aux attentes des étudiants.

Question :
Comment considérez-vous le cours de mathématiques par rapport aux autres cours ? Est-il utile, nécessaire, indispensable,... ? Expliquez.

Réponse des étudiants :

Il est utile pour comprendre d'autres cours de première candidature tels que la physique, la chimie.

Question :
Pourriez-vous vous passer du cours de mathématiques même si celles-ci sont présentes dans les autres cours ?

Réponse des étudiants :

Non car tous les étudiants viennent d'horizons mathématiques différents, une mise à niveau est donc bien utile.

Question :
Quelles notions mathématiques vous sont utiles dans les autres cours de première candidature en biologie tels que la physique, la chimie,... et plus particulièrement en biologie ?

Réponse des étudiants :

Les intégrales, les vecteurs en physique
Les exponentielles en biologie et en chimie.

Question :
Quelles sont les principales difficultés liées aux mathématiques que vous rencontrez dans les cours de première candidature ? Expliquez.

Réponse des étudiants :

La modélisation, la traduction en mathématiques d'un énoncé en français.

Question :
Existe-t-il une cohérence et une concordance dans le temps entre le cours de mathématiques et les autres cours de première candidature en sciences biologiques ? Expliquez.

Réponse des étudiants :

Il serait peut-être bon de dispenser d'avantage d'heures de mathématiques au premier semestre. Des notions importantes et utilisées très tôt dans d'autres cours de première candidature, comme les intégrales et les dérivées partielles dans le cours de physique, seraient alors peut-être étudiées plus tôt au cours de mathématiques.

Question :
Existe-t-il des différences de notations entre les différents cours de première candidature qui vous perturbent ? Y a-t-il des améliorations à entreprendre dans le cours de mathématiques ? Avez-vous des commentaires à formuler sur les éventuelles notes de cours et syllabus de mathématiques (clarté, aide à la compréhension, rapport avec l'exposé,...) ? Lesquels ?

Réponse des étudiants :

Parfois, il arrive que certains professeurs notent différemment une même notion mais ils le signalent toujours. Cela n'engendre donc pas de problèmes.

Question :
La matière vue aux séances de travaux dirigés de mathématiques vient-elle à point par rapport à l'évolution du cours de mathématiques ? Les travaux dirigés contribuent-ils à assimiler la théorie ? Expliquez.

Réponse des étudiants :

Les étudiants souhaiteraient résoudre seuls d'avantage de problèmes de modélisation durant les séances de travaux dirigés. Plusieurs exemples sont présentés durant le cours, mais c'est le professeur qui les résout.

Question :
Les tests, les cours préparatoires, les séances de monitorat en mathématiques,... sont-ils utiles ? Pourquoi ?

Réponse des étudiants :

Oui très utiles. Les cours préparatoires permettent une mise à niveau, font un rappel de notions indispensables. Les séances de monitorat ont pour but de réexpliquer des notions moins bien perçues. Les tests offrent à l'étudiant la possibilité de se situer, de voir où il en est par rapport à la matière et l'obligent à étudier. Ils constituent la première échéance.

Question :
Selon vous, quels concepts mathématiques vous seront utiles après la première candidature et après vos études ?

Réponse des étudiants :

Les mathématiques seront utiles pour la rigueur, le raisonnement qu'elles apportent.

1.4 Brève analyse du programme de mathématiques des deux dernières années de l'enseignement secondaire de transition (FESEC, [14])

Nous avons brièvement analysé ce programme dans le but d'examiner quelles notions mathématiques sont étudiées en fin d'humanités.

1.4.1 introduction

A la fin de l'enseignement secondaire de transition, l'élève va s'engager dans une voie où les mathématiques seront, selon l'orientation choisie, « un élément de base dans sa vie de citoyen, tant du point de vue socio-économique que culturel, un outil d'apprentissage au service d'autres disciplines ou encore un outil d'investigation, de recherche, de développement, visant les mathématiques pour elles-mêmes… ». Les différents programmes de mathématiques prennent évidemment en compte ces divers aspects.

Le programme de transition est destiné à la fois aux élèves de transition générale et de transition technique. Les élèves de ces deux sections étudient les mêmes cours généraux : deux langues étrangères, mathématiques, français,… La différence entre les deux orientations se situe au niveau des options : les élèves de transition générale suivent des cours à options de quatre heures, ceux de transition technique une option de huit heures. Les cours en transition générale sont plus théoriques que ceux de transition technique où ils sont axés sur la pratique. Le diplôme, en transition générale, mène aussi bien à des études supérieures de type universitaire ou non tandis qu'en technique, il dirige d'avantage les élèves vers des études supérieures de type non universitaire, même si l'accès à l'université ne leur est pas fermé. En outre, en transition technique, les élèves sont d'avantage orientés vers une option précise.

Les concepteurs de ce programme insistent sur le fait que l'enseignant devrait partir de situations concrètes pour aboutir à la théorie. Il en est de même pour les programmes du 1er et 2ème degré (*) où on essaie de développer l'autonomie de l'élève et où on préconise le recours à des situations problèmes comme point de départ à une structuration théorique.
Le professeur devra également accorder de l'attention à l'interprétation. Par exemple, pour introduire la notion de dérivée comme taux instantané de variation ou comme vitesse instantanée de variation d'une grandeur (c'est-à-dire comme la limite d'un taux moyen ou d'une vitesse moyenne de variation de cette grandeur), on va étudier la vitesse avec laquelle varie l'aire délimitée par une onde circulaire dont le rayon augmente à vitesse constante. Cette étude met en jeu les notions de tableaux, graphiques et formules. Pour ce faire, on va donner un énoncé aux élèves. Celui-ci va permettre à ces élèves de découvrir le problème, de le résoudre pas à pas avec l'aide, à la fois, du professeur et par leur questionnement et, enfin, d'arriver à la définition et à la représentation du nouveau concept (la dérivée d'une fonction en un point).
Cette méthode de travail permet de donner une signification très précise à l'intuition que les élèves peuvent avoir d'une notion. Lors de cette construction, quelques doutes peuvent naître chez les élèves quant à la signification du résultat obtenu. La réponse à leurs incertitudes s'obtiendra notamment par des raisonnements par l'absurde et ce sera l'occasion de préciser les notions étudiées. Il est important de donner du sens aux notions abordées, par exemple : en

interprétant la dérivée en termes de pente de la tangente en un point du graphe et d'approximation affine en un point du domaine de la fonction. Cela devrait aider les élèves à approfondir la notion étudiée.

(*) 1er degré : 1ère et 2ème années secondaires
2ème degré : 3ème et 4ème années secondaires

1.4.2 le programme

Nous ne tiendrons compte, dans ce mémoire, que du programme de 6 et 4 périodes car il s'agit des deux types de formations minimums pour pouvoir normalement aborder la première candidature en biologie. Pour rappel, un programme de 2 périodes par semaine existe également.

Pour travailler certaines des notions abordées dans le programme, les élèves disposent normalement d'une calculatrice graphique ou d'un recours à des logiciels mathématiques adaptés à la représentation graphique, à la modélisation géométrique et au traitement des données.

Thèmes :	**Contenu du cours à 4 périodes par semaine**	**Contenu du cours à 6 périodes par semaine**
1. « Associer les outils vectoriels et analytiques à des intuitions géométriques et intégrer les situations spatiales au raisonnement géométrique ».	- extension à l'espace de notions vues en quatrième : coordonnées d'un point, calcul vectoriel - produit scalaire dans le plan et dans l'espace : propriétés de commutativité et de linéarité, applications du produit scalaire - trigonométrie : formules d'addition et de duplication, équations élémentaires - géométrie analytique des plans et des droites : caractérisation vectorielle ou analytique d'un plan, d'une droite, systèmes d'équations 3x3	Ce thème n'est pas repris en tant que tel dans le cours à 6 périodes mais il est abordé de manière plus approfondie et présenté en 2 volets, voir les thèmes : - « 4. mettre au point des outils qui associent la géométrie à de nouvelles formes de calcul, et exploiter les méthodes de démonstration et de résolution de problèmes qui en découlent » - « 5. développer certains savoirs algébriques pour enrichir la géométrie plane, l'algèbre et l'analyse »

Thèmes :	**Contenu du cours à 4 périodes par semaine**	**Contenu du cours à 6 périodes par semaine**
2. « Comprendre la portée des informations chiffrées, les analyser et les critiquer à l'aide de paramètres statistiques et du calcul des probabilités ».	- probabilité : définition, loi de la somme, loi du produit, probabilités conditionnelles, événements indépendants - usage des moyens modernes de calcul, représentation d'une série statistique à deux variables au moyen d'un nuage de points, point moyen du nuage, ajustement linéaire (affine) d'un nuage statistique : par des considérations graphiques, par la méthode des moindres carrés - analyse combinatoire : arrangements et permutations, combinaisons - schéma binomial	même contenu que le cours à 4 périodes avec les *notions supplémentaires* suivantes : - triangle de Pascal et binôme de Newton - probabilité : notion de variables aléatoire, espérance mathématique, variance et écart-type, loi binomiale

Thèmes :	**Contenu du cours à 4 périodes par semaine**	**Contenu du cours à 6 périodes par semaine**
3. « Déterminer certaines caractéristiques d'un phénomène à l'aide des outils du calcul infinitésimal et les interpréter à l'aide d'un graphique, un tableau numérique et une expression algébrique ».	Graphiques de fonctions : - description et comparaison de graphiques, construction de quelques graphiques de fonctions obtenues par somme, différence, produit, quotient de fonctions de référence - composition de fonctions de référence, décomposition d'une fonction en fonctions de référence - graphique de fonctions réciproques et symétrie Limites de fonctions et asymptotes : - construction de suites arithmétiques et géométriques, somme de termes, limites associées - limite en +, - de fonctions, asymptotes horizontales, limite infinie en un point, asymptotes verticales, limite à gauche et limite à droite, limite infinie en + et -, y compris les cas d'asymptotes obliques, limites en un point, limites de fonctions trigonométriques de base - règles de calcul des limites, cas d'indétermination	même contenu que le cours à 4 périodes avec les *notions supplémentaires* suivantes: Graphiques de fonctions : - interprétation de quelques graphiques de fonctions obtenues par somme, différence, produit, quotient de fonctions de référence Limites de fonctions et asymptotes : - opérations fondamentales sur les nombres réels, la droite réelle - continuité d'une fonction en un point, expression de la continuité au point d'abscisse a par la condition $\lim f(x) = f(a)$ $(x \rightarrow a)$, continuité dans un intervalle

Thèmes :	**Contenu du cours à 4 périodes par semaine**	**Contenu du cours à 6 périodes par semaine**
3. « Déterminer certaines caractéristiques d'un phénomène à l'aide des outils du calcul infinitésimal et les interpréter à l'aide d'un graphique, un tableau numérique et une expression algébrique ».	Dérivées : - nombre dérivé, fonction dérivée, interprétation géométrique (tangente), cinématique (vitesse), économique (coût marginal)… - calcul des dérivées : dérivée des fonctions usuelles, dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, dérivée de la composée de deux fonctions - applications diverses : dérivées et croissance, modélisation de problèmes liés à la physique, l'économie, aux sciences humaines,… , approximation locale d'une fonction par une fonction du premier degré, résolution approchée d'une équation, problèmes liés à la recherche de valeurs extrémales, représentation graphique de quelques fonctions Primitives et intégrales : - intégrale définie sur un intervalle, calcul numérique d'une intégrale définie - primitive d'une fonction - calculs de primitives, d'aires, de volumes, du travail d'une force,…	*notions supplémentaires par rapport au cours à 4 périodes :* Dérivées : - fonctions dérivables, non dérivables en un point, sur un intervalle - théorèmes classiques : théorème des accroissements finis, relation entre la croissance d'une fonction dérivable et le signe de sa dérivée première, relation entre la concavité du graphique d'une fonction deux fois dérivable et le signe de sa dérivée seconde - applications diverses : règle de l'Hospital Primitives et intégrales : - intégrale d'une fonction continue sur un intervalle, calcul numérique d'une intégrale

Thèmes :	**Contenu du cours à 4 périodes par semaine**	**Contenu du cours à 6 périodes par semaine**
3. « Déterminer certaines caractéristiques d'un phénomène à l'aide des outils du calcul infinitésimal et les interpréter à l'aide d'un graphique, un tableau numérique et une expression algébrique ».	Fonctions logarithmiques et exponentielles : - définitions et propriétés - résolution d'équations, calcul de limites, de dérivées, d'intégrales	*notions supplémentaires par rapport au cours à 4 périodes :* Fonctions cyclométriques : - définition, domaine de définition - dérivées des fonctions cyclométriques

Thèmes :	**Contenu du cours à 4 périodes par semaine**	**Contenu du cours à 6 périodes par semaine**
4. « Mettre au point des outils qui associent la géométrie à de nouvelles formes de calcul, et exploiter les méthodes de démonstration et de résolution de problèmes qui en découlent ».	(voir thème 1.)	- extensions à l'espace des notions de calcul vectoriel vues en quatrième (idem au cours à 4 périodes), vecteur : composantes, somme, produit par un nombre, propriétés, relation de Chasles - orthogonalité, distance, produit scalaire dans le plan et dans l'espace (idem au cours à 4 périodes) : propriétés de commutativité et de linéarité, applications du produit scalaire - géométrie analytique des plans et des droites (idem au cours à 4 périodes) : équations vectorielles, paramétriques, cartésiennes d'un plan, d'une droite - transformations et lois de compositions de transformations, notion de groupe - calcul matriciel : définitions, opérations fondamentales - résolution de systèmes (m x n) où m et n ne dépassent pas trois, discussion de systèmes (n x n) à un paramètre ($n \leq 3$) - déterminants : calculs et propriétés - démonstrations qui utilisent des propriétés de figures, des transformations, des vecteurs,...

Thèmes :	**Contenu du cours à 4 périodes par semaine**	**Contenu du cours à 6 périodes par semaine**
5. « Développer certains savoirs algébriques pour enrichir la géométrie plane, l'algèbre et l'analyse ».	(voir thème 1.)	Trigonométrie : - formules d'addition, de duplication (idem au cours à 4 périodes), formules exprimant sin x, cos x, tg x en fonction de tg x/2, formules de Simpson - équations et inéquations trigonométriques simples Nombres complexes : - définitions, opérations, module et conjugué d'un nombre complexe, module d'un produit, inégalité triangulaire, argument d'un nombre complexe, formule de De Moivre - nombres complexes et transformations du plan - interprétation géométrique des transformations $z \rightarrow z+a$, $z \rightarrow kz$ (k réel) et $z \rightarrow z(\cos \Theta + i \sin \Theta)$ - applications géométriques et algébriques Coniques et courbes paramétrées : - définitions géométriques et équations cartésiennes réduites - propriétés et applications des coniques - problèmes de lieux et constructions de courbes paramétrées

1.4.3 conclusion

Cette analyse du programme nous permet d'apporter des éléments de réponse à la question suivante :

En première candidature en biologie, certaines des notions abordées dans les cours de physique et chimie ne sont pas reprises dans celui de mathématiques. Ces notions seront-elles étudiées plus tard ? Ou bien avaient-elles déjà été abordées en humanités ?

Des enquêtes réalisées durant plusieurs années par le professeur de mathématiques de première candidature en biologie ont montré que presque tous les étudiants ont suivi durant les deux dernières années de leurs humanités un cours de mathématiques de 4 ou de 6 périodes. Pour nous rendre compte des notions étudiées en humanités par un public d'étudiants de première candidature en biologie, nous allons donc nous baser sur la formation minimum, à savoir 4 périodes par semaine.

Nous remarquons, en analysant ce programme que certaines des notions abordées dans les cours de chimie ou de physique de première candidature en biologie mais non traitées dans le cours de mathématiques comme les notions simples (règle de trois, pourcentage, puissance,...), les limites, la trigonométrie, la géométrie ont été étudiées en humanités. Il n'est donc normalement pas nécessaire de les revoir lors du cours de mathématiques de première candidature. De plus, les sessions préparatoires, les séances de monitorat,... sont prévues pour rappeler ces notions aux étudiants qui en éprouvent le besoin.

Nous pouvons cependant noter que des notions comme les équations aux dérivées partielles, les intégrales impropres, de surface ou de volume ne sont étudiées ni en humanités, ni dans le cours de mathématiques de première candidature bien qu'elles interviennent dans le cours de chimie ou de physique. Cependant, les professeurs n'émettent pas le souhait que ces notions soient expliquées car il n'est pas demandé aux étudiants de pouvoir résoudre ces équations ni de pouvoir calculer ces intégrales.
Les probabilités et les statistiques sont, quant à elles, approchées en humanités. Elles ne sont cependant pas approfondies en première candidature. Un cours leur est consacré en 2$^{\text{ème}}$ candidature.(voir § 2.2.2)

Néanmoins, des notions telles que le calcul vectoriel, les fonctions réelles élémentaires, les dérivées, les primitives et intégrales, les fonctions logarithmes et exponentielles ont été étudiées en humanités mais sont revues en première candidature avec plus de détails et/ou une approche différente. Par exemple, le produit vectoriel n'a pas été étudié en humanités. Il est donc bon de l'aborder en première candidature car il est utile dans le cours de physique. Autre exemple, les étudiants n'ont pas appris à interpréter les fonctions logarithmiques et exponentielles en vue de modéliser des problèmes. Il est donc utile d'aborder cet aspect car la modélisation de problèmes est incontournable en sciences de la vie. Une révision et un approfondissement de toutes ces notions s'avèrent nécessaires.

Des concepts tels que les polynômes de Taylor, les équations différentielles du premier ordre, les fonctions de plusieurs variables constituent de la nouvelle matière aux yeux de tous les étudiants. Le professeur de mathématiques de première candidature devra donc veiller à bien les détailler.

Enfin, tous les étudiants n'ayant pas suivi la même formation mathématique en humanités, certains ont étudié des notions comme les nombres complexes, les matrices,... propres au cours à 6 périodes. Les chapitres consacrés à celles-ci dans le cours de mathématiques de première candidature constitue donc pour certains étudiants une découverte et pour d'autres un approfondissement.

Chapitre 2

Les mathématiques comme outil au service de la biologie.

2.1 Introduction

Nous avons souhaité comprendre comment les mathématiques étaient utilisées en biologie aussi bien durant les études dans ce domaine qu'après celles-ci. Les références (Bertrandias, [8] ; Blondel, [9], Dominique, [13]) nous ont permis de nous rendre compte que les mathématiques constituent un outil de plus en plus indispensable dans les disciplines scientifiques et en particulier en biologie. Elles interviennent par exemple dans la modélisation de l'os humain, dans la modélisation du comportement des insectes,... Les équations différentielles constituent un outil de base de la modélisation dans les sciences expérimentales. Elles servent à traduire les lois qui régissent la variation des grandeurs.

Les principaux outils mathématiques utilisés dans les sciences de la vie et de la nature surviennent à partir de questions posées par la mise en œuvre d'applications. Il faut d'abord faire un effort d'abstraction à partir de faits d'observation ou d'expérimentation. Ensuite, l'effort se poursuit dans l'élaboration mathématique de notions théoriques comme celle de fonction,.... Enfin, en revenant au réel, ces notions permettent de donner des modèles utilisables pour décrire les phénomènes étudiés, expliquer leurs relations et prévoir leur évolution.
Les mathématiques sont importantes car elles apportent des réponses aux besoins des scientifiques face aux réalités de l'observation et de l'expérimentation. Elles permettent de modéliser des situations de la vie scientifique (datation du carbone 14, par exemple), de la vie « réelle » (croissance ou extinction d'une population, par exemple) : les représentations graphiques ou numériques engendrent la possibilité d'interpréter des résultats expérimentaux et enfin de rechercher et de valider des modèles. Il faut pouvoir passer des données expérimentales à la modélisation et cela se fait grâce aux mathématiques.

Pour comprendre le rôle joué par les mathématiques en biologie, nous avons brièvement analysé le cours de biologie de première candidature, différents cours (susceptibles de contenir des mathématiques) de deuxième candidature et de première licence en biologie ainsi que divers manuels de « biomathématique ».

Suite à ces brèves analyses, plusieurs questions sont survenues. Nous avons tenté d'y répondre en nous entretenant avec quelques étudiants de deuxième licence en biologie et en rencontrant des professeurs et chercheur en biologie aux Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix.

2.2 Les mathématiques dans la formation du biologiste

2.2.1 le cours de biologie de première candidature

L'enseignement de la biologie en première candidature en sciences biologiques aux Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix repose sur l'ouvrage « Biologie » (Campbell, [11]). Nous avons donc consulté cet ouvrage comme nous l'avons fait précédemment pour les manuels de physique et de chimie (lecture de la table des matières, index, préface, relevé des concepts mathématiques,…). Nous avons remarqué que certains concepts mathématiques sont présents dans cet ouvrage mais qu'ils ne sont pas mis en évidence. Ils ne sont pas notés dans la table des matières, ni dans l'index,… Ce sont seulement des outils.

Nous avons pu dresser les listes suivantes des concepts mathématiques rencontrés dans cet ouvrage :

Concepts mathématiques présents dans le cours de biologie et abordés dans le cours de mathématiques de première candidature :

- le symboleΣ : signification et utilisation
- fonctions réelles élémentaires :
  les fonctions : outils pour la relation entre variables
  fonction de proportionnalité directe : la droite : graphe, interprétation de son graphe, équation de la droite
  fonction de proportionnalité inverse : l'hyperbole : expression algébrique de la proportionnalité inverse
- dérivées d'une fonction réelle : calcul de dérivées, utilisation des dérivées pour l'analyse des variations d'une fonction réelle d'une variable réelle : croissance et décroissance de fonctions, taux de variation
- fonctions logarithmes et exponentielles : calculs de logarithmes décimaux, fonctions exponentielles et représentations graphiques
- équations différentielles du premier ordre : équation logistique

Concepts mathématiques présents dans le cours de biologie mais non abordés dans le cours de mathématiques de première candidature :

- notions « simples » : calcul de pourcentages, puissances de 10, règle de trois,…
- interprétations de graphiques : pyramides, graphes en bâtonnets, graphe avec échelle logarithmique
- géométrie dans l'espace : vision et représentation de volumes dans l'espace
- statistiques : densité, distribution, fréquence,…

Toutes ces notions mathématiques interviennent très peu tout au long de l'ouvrage. La seule qui semble plus importante concerne les équations différentielles, utiles pour les études de populations et la modélisation de problèmes.

Nous avons à nouveau constaté que les nombres complexes, les polynômes de Taylor, les matrices, présents dans le cours de mathématiques de première candidature, ne trouvent pas leur utilité dans ce cours de biologie. Par contre, la géométrie dans l'espace, les statistiques sont rencontrées dans ce cours de biologie alors qu'elles ne le sont pas dans celui de mathématiques.

2.2.2 présence des mathématiques dans les cours de 2ème candidature et de 1ère licence en biologie

Cette partie constitue une approche de certains cours de 2ème candidature et 1ère licence en biologie.
Nous avons uniquement pris en considération les cours communs aux différentes orientations et choisi parmi ceux-ci, les plus susceptibles d'utiliser des notions mathématiques (Programme des cours, [20]), à savoir :

- **2ème candidature :**

physique	SPHY 1215	22,5 heures (de théorie)
mathématiques	SCHI 1211	22,5 heures (15 de théorie et 7,5 d'exercices)
statistiques	SBIO 1205	45 heures (30 de théorie et 15 d'exercices)

- **1ère licence :**

biostatistiques	SBIO 2124	30 heures (15 de théorie et15 de travaux pratiques)

Pour ce faire, nous avons travaillé avec les notes de cours d'une étudiante et le syllabus d'un professeur.(André, [2])

Le cours de MATHEMATIQUES (J-M. André) constitue une introduction aux méthodes de résolution des équations différentielles (du premier ordre, du deuxième ordre, couplées).
Dans le cours de STATISTIQUES (E. Depiereux), l'approche statistique familiarise le biologiste avec la variabilité qui caractérise les expériences quantitatives. Les techniques graphiques permettent de représenter et de synthétiser les résultats. Ce cours traite de statistiques descriptives à une et deux dimensions, de probabilités, de variables aléatoires et de leurs distributions ainsi que d'inférence statistique.
Le cours de PHYSIQUE (J-J. Pireaux) traite de la dualité onde-corpuscule, de mécanique quantique (atomes et molécules) et de physique nucléaire. Les principes physiques sous-jacents à certaines techniques courantes en biologie comme le laser, l'absorption atomique, la spectroscopie, les techniques de traceur et de datation sont introduits.
Le cours de BIOSTATISTIQUES (E. Depiereux) traite de rappels généraux concernant les statistiques, d'analyse de variance, des intervalles de confiances et des tests d'hypothèses,...

Ces cours utilisent les notions suivantes :

Concepts mathématiques présents dans les cours pré-cités et abordés dans le cours de mathématiques de première candidature :

- le symbole Σ : utilisation
- matrices : calcul de déterminants d'une matrice carrée,...
- résolution de systèmes d'équations linéaires
- vecteurs (mais d'un point de vue géométrique : représentation)

- fonctions réelles élémentaires :
  graphes (fonctions : outils pour la relation entre variables)
  proportionnalité directe (expression algébrique), la droite, son équation et ses propriétés, pente de la droite
  les fonctions polynomiales
- dérivées : calcul de dérivées totales, premières et secondes, utilisation des dérivées pour l'analyse des variations d'une fonction réelle d'une variable réelle : croissance, minimum et maximum
- intégrales : calculs exacts de primitives et d'intégrales définies
- fonctions logarithmiques, exponentielles et puissances : leurs propriétés et leur représentation graphique
- développement en série de e^{-x}
- équations différentielles du premier ordre : définition et résolution
- les nombres complexes, résolution d'équations du 2ème degré
- fonctions de plusieurs variables : définitions, dérivées partielles premières et deuxièmes

Concepts mathématiques présents dans les cours pré-cités mais non abordés dans le cours de mathématiques de première candidature :

- notions « simples » : puissances de 10, valeur absolue, norme,...
- trigonométrie : fonctions sinus, cosinus et leur représentation graphique, formules de De Moivre, fonctions hyperboliques, relations trigonométriques
- géométrie dans le plan et dans l'espace : angles, perpendicularité, représentation géométrique, coordonnées sphériques, projections, symétrie
- limites, points à l'infini
- équations différentielles du second ordre et couplées : résolution
- statistiques-probabilités
- graphe semi-logarithmique
- transformations de Laplace

Tous les concepts relevés ici ne se présentent généralement que très peu souvent.

La plupart de ces concepts mathématiques sont utilisés par les enseignants dans leur cours et ne sont pas réexpliqués, exception faite dans le cours de mathématiques où le professeur rappelle :

- la définition d'un polynôme de degré n
- l'expression des racines d'un polynôme de degré 2
- les propriétés des logarithmes de base quelconque et népériens
- le développement en série de e^{-x}
- la définition d'une équation différentielle et de son ordre
- différents types d'équations différentielles du premier ordre (équation logistique, équation linéaire homogène du premier ordre, $y' = a + by$)
- la méthode de séparation des variables
- les nombres complexes
- des relations trigonométriques
- des dérivées et intégrales de fonctions trigonométriques
- les expressions des fonctions hyperboliques, leurs propriétés et leur dérivée.

Ces notions, mis à part les fonctions hyperboliques, ont été étudiées dans le cours de mathématiques de première candidature ou en humanités.

2.2.3 brève analyse de quelques manuels et ouvrages traitant de « biomathématique »

Nous avons, dans cette partie, dressé une liste des concepts mathématiques intervenant dans différents ouvrages de biologie destinés aux étudiants en sciences de la vie (biologie, chimie,...). (Atkins, [4] ; Hoppensteadt et Peskin, [18] ; Murray, [19])

Concepts mathématiques présents dans les ouvrages pré-cités et abordés dans le cours de mathématiques de première candidature :

- le symbole $\sum$: utilisation
- matrices : opérations matricielles, calculs de déterminants de matrices carrées,...
- fonctions réelles élémentaires : les fonctions : outil pour la relation entre variables
  proportionnalité directe : expression algébrique, la droite, son équation, sa pente et sa représentation graphique
  fonctions polynomiales
- dérivées d'une fonction réelle : calcul de dérivées totales, premières, deuxièmes, utilisation des dérivées pour l'analyse des variations d'une fonction réelle d'une variable réelle : extrema et concavité, croissance et décroissance
- intégrales : calculs exacts de primitives et d'intégrales définies
- fonctions logarithmiques et exponentielles : calculs, représentations graphiques
- équations différentielles du premier ordre
- les nombres complexes, résolution d'équations du deuxième degré
- fonctions de plusieurs variables : définitions, dérivées partielles premières, secondes

Concepts mathématiques présents dans les ouvrages pré-cités mais non abordés dans le cours de mathématiques de première candidature :

- notions « simples » : puissances, valeur absolue, calculs de pourcentages,...
- trigonométrie : sinus, cosinus, tangente, cercle trigonométrique,...
- limites ($\rightarrow$ constante, $\rightarrow$ infini, $\rightarrow$ 0)
- matrices : calculs des valeurs propres
- intégrales de surface, intégrales impropres
- équations différentielles du deuxième ordre
- probabilités, analyse combinatoire
- statistiques : moindres carrés,...
- suites
- conditions de Routh-Hurwitz, règle des signes de Descartes
- opérateur Laplacien, transformation de Laplace

Certaines de ces notions n'ont qu'un poids très faible dans les ouvrages concernés (conditions de Routh-Hurwitz, règle des signes de Descartes) et sont peut-être plutôt propres aux chimistes qu'aux biologistes, puisque ces manuels sont destinés à l'ensemble des étudiants en sciences de la vie. Les équations différentielles du second ordre et les statistiques, relevées comme non abordées durant le cours de mathématiques de première candidature, mais présentes dans les manuels, sont étudiées en deuxième candidature (dans le cours de mathématiques et dans celui de statistiques).

Les concepts mathématiques « courants » comme les fonctions, les dérivées, les intégrales, les logarithmes et exponentielles, les équations différentielles, les notions simples, la trigonométrie, les limites,... sont utilisés dans les ouvrages sans être expliqués aux lecteurs. Cependant, ces manuels consacrent des appendices à l'explication de notions plus élaborées ou moins courantes comme les conditions de Routh-Hurwitz, la règle des signes de Descartes, l'opérateur Laplacien, les matrices et les déterminants.

2.2.4 conclusion

Les analyses développées tout au long de ce chapitre, nous ont permis de répondre à la question suivante :

> *Faut-il étudier le calcul matriciel, les nombres complexes, les polynômes de Taylor, dans le cours de mathématiques de première candidature en biologie, si ces notions ne sont pas utiles dans les autres cours de première candidature en sciences biologiques ?*

Grâce à l'analyse de certains cours de deuxième candidature, de première licence et de quelques manuels traitant de « biomathématique », nous avons pu constater que les nombres complexes, les polynômes de Taylor, les matrices, étaient utiles à la compréhension de ces cours et manuels. Il était donc nécessaire de les étudier lors du cours de mathématiques de première candidature car, dans la suite des études en biologie aux Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix, il n'y a plus de possibilité de le faire, le cours de mathématiques dispensé en seconde candidature étant essentiellement centré sur les équations différentielles.

Commentaire :

L'étude du programme du troisième degré de transition de l'enseignement secondaire (voir § 1.4.2) nous a montré que des concepts comme :

- les notions « simples » : règle de trois, pourcentage, puissance,...
- l'interprétation de graphiques (pyramides, graphes en bâtonnets,...)
- la géométrie dans le plan et dans l'espace
- la trigonométrie
- les limites

ont été étudiées en partie, en humanités. Les statistiques et les équations différentielles sont, quant à elles, abordées plus en détails en deuxième candidature.(voir § 2.2.2)

2.3 Questionnements

A la suite de l'analyse de différents cours de première et de deuxième candidature, de première licence et de manuels traitant de « biomathématique », des interrogations se sont profilées, à savoir :

- des questions générales concernant le choix des matières à placer dans le cours de mathématiques et leurs articulations entre elles et avec les autres cours.
- des interrogations concernant le rapport entretenu entre les mathématiques et la biologie, la place des mathématiques en biologie après la première candidature et après la fin des études en biologie.

Pour tenter de répondre à ces interrogations, nous avons

- interrogé quelques étudiants de seconde licence en biologie aux Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix (FUNDP)
- rencontré quelques professeurs du département de biologie aux FUNDP
- discuté avec un chercheur en biologie

Les étudiants de deuxième licence en biologie ayant pris du recul par rapport à la première candidature, nous paraissaient pouvoir être à même de répondre à des questions qui portaient sur trois aspects :

- la transition humanités-université concernant le cours de mathématiques
- le cours de mathématiques de première candidature
- le rapport existant entre les mathématiques et la biologie, la place des mathématiques après la première candidature en biologie et après la fin des études en biologie.

Nous avons par ailleurs, rencontré trois professeurs du département de biologie (Mr Depiereux, Mr Descy et Mr Van Cutsem). Ils ont aimablement accepté de répondre à nos interrogations et ont également pu nous donner des pistes pour illustrer l'utilisation d'outils mathématiques en biologie. Il nous était apparu, et les « biologistes » le confirmeront, qu'introduire un concept mathématique en en montrant son utilité est très important d'un point de vue didactique, lorsqu'on est amené à enseigner des mathématiques à des étudiants en sciences de la vie.

Nous avons également discuté, avec Mr d'Oultremont, chercheur en biologie, du rôle et de la place des mathématiques en biologie.

Dans les paragraphes qui suivent, nous reprenons nos interrogations et présentons, pour chacune de celles-ci, une synthèse des réponses fournies par les personnes interrogées.

2.3.1 interview d'étudiants de deuxième licence en biologie

Nous présentons ici une synthèse de leurs réponses :

Question :
Saviez-vous que vous devriez suivre un cours de mathématiques en première candidature biologie? Comment l'avez-vous appris ?
Cela a-t-il influencé votre choix du nombre d'heures de mathématiques à suivre durant le dernier cycle de vos études secondaires ? Pourquoi ?

Réponse des étudiants :

Les futurs étudiants en biologie savaient qu'ils seraient confrontés à un cours de mathématiques en première candidature. En général, ils l'ont appris en consultant le programme des cours de première candidature en biologie, avant de s'inscrire à l'université. Mais cela n'a pas influencé leur choix du nombre d'heures de mathématiques à suivre en humanités. Certains ont choisi de suivre un cours de 4 périodes parce que c'est à partir de celui-ci que les notions nécessaires et de base sont acquises.
D'autres souhaitant une formation scientifique complète, ont opté pour le cours de 6 périodes. Mais à aucun moment leur choix ne fut dirigé en vue du cours de mathématiques de première candidature biologie.

Question :
Avez-vous le sentiment d'avoir été suffisamment préparés en humanités pour aborder les cours de première candidature en biologie et plus particulièrement celui de mathématiques ? Expliquez.

Réponse des étudiants :

Quelle que soit l'option mathématique (4 ou 6 périodes par semaine) choisie en humanités, les étudiants disent avoir été suffisamment préparés pour aborder la première candidature en biologie. Certains relèvent le fait qu' ils n'avaient pas étudié les équations différentielles en humanités mais que cela n' a pas engendré de problèmes.
D'autres trouvent qu'une formation d'une heure par semaine en physique et en chimie en humanités n'est pas suffisante.
Cependant, aucun n'a envisagé d'entamer une année de spéciales mathématiques-sciences au vu de sa formation dans le secondaire et au vu du programme des cours de la première candidature en biologie.

Question :
Avez-vous éprouvé des difficultés à vous adapter à l'enseignement universitaire (cours plus rapides, moins de répétitions, moins d'exercices,...) ? Expliquez.

Réponse des étudiants :

La faculté d'adaptation à l'enseignement universitaire dépend du caractère de la personne, pas de sa formation théorique.

Question :
Le cours de mathématiques en première candidature biologie était-il cohérent (concernant les notations, la théorie, la continuité,...) par rapport à celui étudié en humanités ? Expliquez.

Réponse des étudiants :

Les réponses varient selon les personnes. Pour certains le cours de mathématiques était très clair, cohérent. Pour d'autres, il n'était pas assez explicite.

Question :
Comment qualifieriez-vous le cours de mathématiques en première candidature biologie (très difficile, moyen, facile, très facile,...) ? Pourquoi ?

Réponse des étudiants :

La plupart des étudiants ayant suivi l'option 4 périodes par semaine en humanités estiment le cours de mathématiques de 1ère candidature d'une difficulté moyenne, en raison du fait, notamment, qu' ils n'avaient pas abordé toutes les matières durant le cycle secondaire.
Ceux qui ont suivi l'option 6 périodes par semaine en humanités, trouvent le cours de mathématiques de 1ère candidature plus facile.

Question :
Comment perceviez-vous le cours de mathématiques en première candidature biologie (attrait, peur, dégoût,...) ? Expliquez.

Réponse des étudiants :

La considération qu'ont les étudiants pour ce cours varie en fonction des matières abordées et des difficultés rencontrées. Un étudiant qui ne rencontre pas de problèmes en mathématiques peut être soit indifférent, soit attiré par les mathématiques. Par contre, lorsque des problèmes surviennent, la plupart des étudiants n'aime plus cette matière.

Question :
Trouviez-vous les matières supposées connues par l'enseignant en mathématiques en première candidature, beaucoup trop nombreuses, trop nombreuses, bonnes, sous estimées ? Pourquoi ?

Réponse des étudiants :

Bonnes en général

Question :
Trouviez-vous que le professeur de mathématiques en première candidature passait trop vite sur certains concepts ? Expliquez.

Réponse des étudiants :

Le rythme était soutenable pour les étudiants ayant suivi un cours de 6 périodes en humanités. Ce fut un peu plus difficile pour les étudiants ayant suivi un cours de 4 périodes.

Question :
Pourquoi imposer un cours de mathématiques en biologie ? Que vous ont apporté les mathématiques en première candidature ? Quelles étaient vos attentes par rapport au cours de mathématiques ? Expliquez.

Réponse des étudiants :

Les mathématiques sont utiles dans d'autres cours à caractère mathématique comme les statistiques, la bioinformatique,... Les équations différentielles servent, d'une façon générale, dans des démonstrations, dans des mises en situation de problèmes,... Les mathématiques permettent également une formation de l'esprit, un développement de l'intelligence, ce qui semble correspondre aux attentes des étudiants.

Question :
Quelles notions mathématiques vous étaient utiles dans les autres cours de première candidature en biologie tels que la physique, la chimie,... et plus particulièrement en biologie ?

Réponse des étudiants :

les intégrales et les dérivées en physique
les logarithmes en chimie
aucun concept en biologie

Question :
Quelles sont les principales difficultés liées aux mathématiques que vous avez rencontré dans les cours de première candidature ? Expliquez.

Réponse des étudiants :

Pas de difficultés majeures pour les étudiants ayant suivi 6 heures de mathématiques en secondaire. Mais pour ceux qui n'avaient reçu que 4 heures, certaines notions mathématiques abordées en 1ère candidature représentaient des éléments tout à fait neufs.
Par conséquent, des concepts tels que les matrices, par exemple, ont pu générer quelques problèmes parmi cette catégorie d'étudiants. Ce genre de situation paraît tout à fait normal, étant donné qu'un cours universitaire ne se limite pas à étudier des notions déjà traitées en humanités.

Question :
Existait-il une cohérence et une concordance dans le temps entre le cours de mathématiques et les autres cours de première candidature en sciences biologiques ? Expliquez.

Réponse des étudiants :

Il n' existe pas toujours une concordance entre le cours de physique et celui de mathématiques, par exemple : les équations différentielles sont rencontrées durant toute l'année en physique et ne sont abordées qu'à la fin de l'année en mathématiques.

Question :
La matière vue aux séances de travaux dirigés de mathématiques venait-elle à point par rapport à l'évolution du cours de mathématiques ? Les travaux dirigés contribuaient-ils à assimiler la théorie ? Expliquez.

Réponse des étudiants :

Les travaux dirigés permettent une meilleure compréhension du cours.

Question :
Les tests, les cours préparatoires, les séances de monitorat en mathématiques,... furent-ils utiles ? Pourquoi ?

Réponse des étudiants :

Les tests permettent de se situer par rapport à la matière, d'évaluer si sa méthode de travail est bonne,...
Les cours préparatoires permettent une révision des notions mathématiques étudiées dans le secondaire.

Question :
Le cours de mathématiques de première candidature vous a-t-il encore aidé après celle-ci ? Expliquez.

Réponse des étudiants :

Dans les années qui suivent la 1ère candidature, les étudiants constatent que les équations différentielles sont utiles dans des démonstrations, dans des mises en équations de problèmes. Les mathématiques sont également utiles dans des cours de statistiques.
La plupart du temps, la calculatrice ou un recours à des logiciels informatiques comme « EXCEL » permettent de se débrouiller pour résoudre des calculs plus compliqués. Mais, en général, seules des notions « simples » sont employées.

Question :
Le cours de mathématiques était-il utile, nécessaire, indispensable,... ou au contraire aurait-on pu s'en passer ? Pourquoi ?

Réponse des étudiants :

Le cours de mathématiques est utile (en général) mais pourrait être réduit.

Question :
Voyez-vous, maintenant que vous êtes en deuxième licence et que vous avez pris du recul par rapport à la première candidature, des améliorations, des changements, à opérer au niveau de la répartition des cours, de la cohérence, des matières abordées,... en mathématiques ? Expliquez.

Réponse des étudiants :

Le cours de mathématiques ne semble pas très utile aux yeux des étudiants. Par contre ils trouvent qu'il serait intéressant de suivre un cours de statistiques dès la première candidature. Celui-ci devrait être accompagné de nombreux exercices. Les étudiants considèrent en effet le cours de statistiques comme plus utile que celui de mathématiques.

Question :
Quels concepts mathématiques sont utiles après la première candidature ? Et quelles notions mathématiques pensez-vous que vous utiliserez encore après la fin de vos études ?

Réponse des étudiants :

Les équations différentielles et les statistiques (selon les orientations)

Question :
Avez-vous eu besoin, lors de vos études, des nombres complexes, des polynômes de Taylor, des matrices ? Si oui, pourquoi ?

Réponse des étudiants :

Les étudiants n'ont pas rencontré le besoin de recourir à ces notions.

Question :
A quoi vous servent les mathématiques aujourd'hui et savez-vous à quoi elles vous serviront après vos études ? Expliquez.

Réponse des étudiants :

Les étudiants interrogés n'en voient pas l'utilité.

2.3.2 interview d'enseignants universitaires en biologie

Nous présentons une synthèse de leurs réponses :

<u>Questions :</u>
Les étudiants abordant une première candidature en biologie sont-ils suffisamment préparés en humanités pour aborder les cours de première candidature en biologie ?

Les étudiants abordant une première candidature en biologie éprouvent-ils plus ou moins de difficultés selon le nombre d'heures de mathématiques qu'ils ont suivi en humanités ?

<u>Réponse des enseignants :</u>

Selon Mr Depiereux et Mr Descy, les étudiants sont plus ou moins bien préparés pour aborder une licence en biologie. Il existe différents profils d'étudiants et leur préparation ne tient pas toujours au cursus qu'ils ont suivi précédemment. Bien sûr, le professeur qu'ils ont eu, le niveau de la classe dans laquelle ils étaient,... jouent un rôle important.
Les professeurs remarquent aussi que certains étudiants en biologie sont des personnes qui ont fait des choix d'exclusion : c'est à dire que lors de leurs humanités, ils aimaient les sciences de la vie mais pas les mathématiques, ni la physique,... Ils ne se sont donc pas orientés vers une licence en mathématiques ni en physique et ont opté pour une licence en biologie. Le problème est qu'en première candidature biologie, ils retrouvent ces cours qui ne les intéressent pas. Rares sont alors les étudiants qui se distinguent en mathématiques. Il a d'ailleurs été constaté que, parmi les étudiants attirés par les sciences de la vie, les plus « doués » en mathématiques se dirigeaient d'avantage vers des études en agronomie que vers une licence en biologie. Il est cependant indispensable pour réussir en biologie, de maîtriser la physique, la chimie et les mathématiques.

Pour Mr Van Cutsem, on ne peut pas dire que les étudiants soient mal préparés en humanités. Il y a de bons et de mauvais étudiants. Les humanités constituent une base dans la formation. Elles sont importantes aussi bien pour les notions qui y sont étudiées que pour la méthode qui y est acquise. Ces acquisitions varient en fonction des écoles, des professeurs que les étudiants ont eu en humanités,... Il remarque par exemple, que les étudiants ayant commencé leurs études en France et venant les poursuivre en Belgique sont souvent mieux formés. Cependant, pour pouvoir étudier en Belgique, ils ont dû passer un examen. Il y a donc eu une première sélection. De plus, ne viennent étudier en Belgique que les plus motivés.

<u>Question :</u>
Comment les professeurs de licence en biologie considèrent-ils le cours de mathématiques de première candidature face à leur propre cours ? Est-il utile, nécessaire, indispensable,... ?

Réponse des enseignants :

La biologie et les mathématiques sont étroitement liées. En effet, les mathématiques permettent aux biologistes de mettre en équations des phénomènes étudiés. Elles représentent un outil indispensable qui apporte de la rigueur et elles devraient empêcher le cloisonnement existant entre les mathématiciens et les biologistes. En général, les biologistes sont capables de lire des équations mathématiques et de leur donner du sens mais pas de les résoudre. Tandis que les mathématiciens, eux, peuvent les résoudre mais ils peuvent avoir des difficultés à mettre du sens derrière les variables et paramètres qui les composent. Les mathématiciens et les biologistes devraient d'avantage collaborer ensemble car pouvoir se distinguer dans ces deux domaines (mathématiques et biologie) en même temps est très rare mais très utile.

Question :
Quelles sont les principales difficultés d'ordre mathématique que rencontrent les étudiants en biologie dans le cours de biologie de première candidature ?

Réponse des enseignants :

Le cours de biologie en première candidature est introductif et ne demande pas la connaissance de nombreuses notions mathématiques mais il est important, dans le cours de mathématiques de première candidature en biologie, de bien insister sur la résolution mathématique d'un problème mais aussi sur l'interprétation, le sens à donner à cette solution. Il faudrait par exemple expliquer aux étudiants pourquoi face au graphique d'une fonction, on emploie une telle expression pour la caractériser alors qu'une autre conviendrait également, que c'est dirigé, gouverné par une question de bon sens, de logique. On choisit une telle expression plutôt qu'une autre parce qu'elle fait intervenir les bons paramètres. Les étudiants ont souvent un problème de bon sens. Si lors de la résolution d'un problème, ils aboutissent à la solution où ils gagnent par exemple –5 000 000 de francs, cela n' interpelle pas un certain nombre d'entre eux. Des notions « simples » comme le calcul de puissances, de pourcentages, la règle de trois, mais aussi le calcul de logarithmes, d'exponentielles et la résolution de problèmes engendrent des difficultés chez les étudiants.

Question :
Le contenu du cours de mathématiques recouvre-t-il suffisamment les notions nécessaires au cours de biologie ?

Réponse des enseignants :

Motiver les étudiants, leur expliquer pourquoi on voit telle ou telle notion est très important. Comprendre, avant d'étudier un concept, à quoi il va leur servir en biologie ou dans une autre discipline, va les motiver et ils intégreront dès lors plus facilement ce concept. Cette motivation se fait en introduisant le sujet par des exemples adéquats et en montrant qu'on arrive à quelque chose d'intéressant avec le concept à développer. Il ne faut pas procéder inversement : étudier le concept puis donner des exemples sans avoir motivé la théorie. Il semble qu'en humanités, cette motivation des élèves par des exemples n'existe pas souvent. Or une bonne pédagogie consiste à expliquer pourquoi on a besoin de telle ou telle chose, à motiver. Le drame des mathématiques est qu'elles sont peu présentées comme ouvertes vers l'extérieur et qu'elles sont enseignées par des mathématiciens, à qui on n'a pas appris à chercher le pourquoi des choses, à les motiver. Ils ne le feront alors pas non plus avec leurs futurs élèves.

Mr Van Cutsem ajoute que le cours de mathématiques de première candidature pourrait apprendre aux étudiants à utiliser des outils : calculatrice graphique, logiciels informatiques,... On peut parfois se demander à quoi peut bien servir un cours de mathématiques puisqu'il y a maintenant tellement d'outils disponibles et qui peuvent exécuter des calculs mathématiques à notre place. Il faut se rendre compte que si on ne sait pas se servir de ces outils, on n'arrivera à aucun résultat. De plus, il faut savoir interpréter les informations que ceux-ci nous renvoient, sinon cela ne sert à rien.

<u>Question :</u>
Pourquoi étudier le calcul matriciel, les nombres complexes, les polynômes de Taylor, dans le cours de mathématiques de première candidature en biologie, si ces notions ne sont pas utiles dans les autres cours de première candidature en sciences biologiques ?

<u>Réponse des enseignants :</u>

Le calcul matriciel sera utile dans le futur des étudiants. Ils utiliseront, par exemple, les matrices en statistiques et en génétique des populations. Elles permettront de calculer des distances entre des populations sur base du recensement de caractéristiques de celles-ci. Ils ne les utiliseront que sous forme de tableaux. De plus, bien souvent, ce seront des machines qui effectueront les calculs. Il faut néanmoins que les étudiants comprennent comment celles-ci travaillent.

<u>Question :</u>
Qu'apportent les mathématiques aux étudiants de première candidature ? Pourquoi un cours de mathématiques en première candidature biologie ?

<u>Réponse des enseignants :</u>

Les mathématiques constituent une base importante dans la formation des étudiants. Elles apportent de la rigueur et permettent d'acquérir une méthode de travail, de la régularité.

<u>Question :</u>
Comment les étudiants perçoivent-ils les mathématiques ? (attraction, peur, difficulté)

Réponse des enseignants :

Il faudrait apprendre aux étudiants à avoir confiance en eux lorsqu'ils sont amenés à utiliser des mathématiques dans d'autres disciplines et en particulier en biologie. Dans la suite de leurs études et dans leur emploi futur, ils seront constamment confrontés à de nouvelles situations, à des notions qu'ils n'ont jamais abordées ou plus complexes que ce qu'ils ont déjà étudié. Il faudra qu'ils apprennent « sur le tas » et qu'ils se débrouillent. C'est pour cela qu'il est primordial qu'ils aient confiance en eux. Ils ont souvent un sentiment d'appréhension face aux mathématiques et il faut leur donner confiance en eux pour qu'ils ne se bloquent pas. Il existe un phénomène de rejet, ils ont des a priori à l'égard des mathématiques car ils désirent du concret. Ils n'étudient pas les mathématiques pour les mathématiques mais parce qu'elles leur sont nécessaires dans d'autres domaines.

Question :
A quoi les mathématiques seront-elles utiles aux étudiants après leur première candidature en biologie ? Utiliseront-ils encore les mathématiques d'un point de vue calculatoire proprement dit ou leur seront-elles plus utiles d'un point de vue formation de l'esprit (logique, raisonnement,...) ?

Réponse des enseignants :

Dans leur avenir, les étudiants utiliseront surtout des concepts statistiques parce qu'ils seront souvent confrontés au traitement de données. Il est nécessaire qu'ils aient suivi une formation mathématique pour avoir une bonne compréhension de celles-ci. Toutefois, ils rencontreront peut-être, par la suite, des équations différentielles dans les études de populations, des intégrales en imagerie (traitement des images), des matrices en génétique des populations,...
La rigueur, la méthode que les mathématiques développent leur seront également d'un grand soutien. De même qu'une formation à l'utilisation d'outils (calculatrice, logiciels informatiques) peut leur être utile.

Question :
Les mathématiques joueront-elles un rôle différent chez les diplômés en biologie travaillant à l'université ou chez ceux qui décrocheront un emploi à l'extérieur ? La formation en mathématiques devrait-elle être différente selon la filière choisie ?

Réponse des enseignants :

Au niveau du « cursus mathématique » nécessaire à l'avenir des étudiants en biologie, il n'y a pas de différence entre ceux qui vont travailler à l'université (pour la préparation d'un doctorat, par exemple) et ceux qui vont travailler à l'extérieur. Comme il est dit précédemment, s'ils ont besoin d'un concept qu'ils n'ont jamais abordés avant, ils l'apprendront « sur le tas ». Cependant, ceux qui vont travailler à l'université, vont sans doute collaborer à la formation de la génération suivante. Ils seront peut-être d'avantage confrontés aux mathématiques. Il ne faut donc pas qu'ils les évitent.

Les mathématiques ne jouent pas non plus un rôle différent chez des étudiants ayant suivi la filière écologie ou biologie moléculaire.

2.3.3 discussion avec un chercheur en biologie

Mr d'Oultremont commença une licence en biologie avec pour objectif de se spécialiser en génétique ou en biologie moléculaire. Au cours de ses études et après plusieurs voyages, il remit en question certaines attitudes : travailler exclusivement par « essai-erreur » ne le satisfaisait pas. Il aurait souhaité trouver un domaine lui permettant d'intégrer la modélisation mathématique. Il se retrouva face à l'inconnu car il avait peu appris à fonctionner de cette façon. Il décida, durant son doctorat, d'essayer de construire des modèles « mathématiques » de phénomènes écologiques. Il trouva pour cela un soutien aux Etats-Unis où des enseignants et chercheurs l'aidèrent à réunir les mathématiques et la biologie dans l'étude de la dynamique des populations.

Le point de vue de Mr d'Oultremont est résumé dans les paragraphes suivants.

Par le passé, la biologie était surtout descriptive. Les phénomènes de biologie sont souvent très complexes et la biologie est très vaste. Il est donc difficile de mettre tout en relation. Il y a quelques années, un pas est réalisé dans le domaine de l'écologie : on conçoit des équations concernant des algues. Il en existait déjà auparavant mais celles-ci n'étaient pas très rigoureuses. Cependant, certains biologistes ne semblent pas encore convaincu de l'utilité des mathématiques. La physique a connu le même type de développement mais celui-ci a été beaucoup plus rapide qu'en biologie parce que les mathématiques lui sont d'avantage liées.

Il faut distinguer deux types de modélisation : d'une part, la modélisation en vue de la prédiction : celle-ci est déterministe et précise et d'autre part, la modélisation en vue de la prévision : celle-ci est moins précise (des erreurs sont commises) mais est utilisée pour pouvoir modifier les comportements.
En écologie, par exemple, les chercheurs sont amenés à réaliser des expérimentations qui peuvent prendre un certain temps. Par exemple, pour tester l'efficacité d'un engrais, ils doivent attendre le temps de la récolte.
Cependant, ils ne disposent pas toujours du temps nécessaire pour réaliser toutes les expérimentations souhaitées. L'utilisation d'une modélisation mathématique prend alors tout son sens : si des équations permettent de décrire le comportement d'un système au moyen de divers paramètres, il suffira de faire varier virtuellement ces paramètres et d'en « observer » le résultat. Cela peut permettre de gagner du temps en ne procédant qu'aux expérimentations les plus prometteuses.

Apprendre aux étudiants en biologie les stratégies de modélisation est donc très important. La plupart du temps, en biologie, les chercheurs étudient la mécanique d'un phénomène mais ils ne la mettent pas en équations. Lorsque les étudiants se retrouvent face à un problème de modélisation, ils se sentent souvent démunis et anxieux face à une nouvelle situation. Dès que les mathématiques entrent en jeu dans la biologie, ils ont alors des appréhensions. Ils vont devoir penser, réfléchir d'une autre façon car ils n'ont pas été suffisamment sensibilisés à ce type d'approche. De plus, les étudiants doivent travailler la résolution de problèmes de modélisation d'avantage que les mathématiciens qui se contentent de résoudre les équations car les biologistes doivent donner, en plus, du sens aux résultats obtenus. Pour réaliser cela, il leur manque parfois des compétences transversales. Ils ne savent

pas toujours faire de liens logiques entre deux choses, or c'est très important dans une discipline scientifique.
Il est primordial de montrer aux étudiants l'utilité des mathématiques, de leur faire voir que grâce à celles-ci, on peut être prédictif et que ce n'est pas toujours très difficile. Pour éveiller l'intérêt des étudiants, il faudrait, dans la mesure du possible, traiter des exemples tirés de la biologie.

Concernant les mathématiques, les étudiants en biologie doivent maîtriser des notions simples (comme la règle de trois), la géométrie, les fonctions, les dérivées et tous les concepts nécessaires pour comprendre les équations différentielles, les nombres complexes et les statistiques (y compris les matrices). Pour être compétent en statistiques, ils ne doivent pas seulement pouvoir manipuler un logiciel informatique tel qu' « EXCEL » et cliquer sur une souris. Ils doivent également savoir comment le logiciel fonctionne, comprendre ce qu'il fait et pouvoir interpréter les résultats fournis par celui-ci.

Les besoins en mathématiques après les études varient d'un secteur à l'autre. Certains biologistes travailleront dans un domaine où ils ne feront que de la description. Ils n'auront alors pas besoin de recourir aux mathématiques. Pour d'autres, des notions connues de mathématiques interviendront dans leur travail mais souvent ils les utiliseront machinalement, sans réfléchir profondément à la démarche utilisée. Ils seront cependant, la plupart du temps, confrontés à des équations différentielles.

Aux Etats-Unis, les biologistes ont d'avantage l'habitude de travailler avec des mathématiques. Comme en général, ils sont en avance sur notre continent, on peut espérer que cette philosophie se développera chez nous, malgré certaines réticences. En statistiques, le pas a déjà été franchi. Les mathématiques ont convaincu de leur utilité.

Chapitre 3

Un regard plus large sur l'enseignement des mathématiques en biologie.

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, notre objectif fut d'observer quelle place occupent les mathématiques dans les études de biologie en général.

Dans un premier temps, nous avons comparé l'enseignement des mathématiques dans le cursus des biologistes de notre université (FUNDP) avec ceux dispensés aux étudiants en biologie dans les autres universités francophones du pays, en confrontant le nombre d'heures consacrées respectivement à cet enseignement.

Ensuite, nous avons élargi notre champs d'action en comparant le programme du cours de mathématiques de première candidature en biologie de notre université avec le contenu de manuels d'enseignement des mathématiques, à l'attention des étudiants en sciences de la vie, publiés à l'étranger.
Cependant, une étude complète aurait exigé une très longue recherche que nous ne pouvions entreprendre dans le cadre de ce mémoire. Aussi, nous avons choisi d'aborder modestement le sujet en nous limitant à quelques ouvrages édités en France, en Grande-Bretagne et aux Etats-Unis.

3.2 Les mathématiques en licence biologie dans d'autres universités belges

Nous avons comparé l'enseignement des mathématiques dans la formation des étudiants en biologie dans quatre universités francophones du pays, en confrontant le nombres d'heures consacrées respectivement à cet enseignement. Nous n'avons tenu compte que des cours communs aux différentes orientations.

(sources : http://www.fundp.ac.be, http://www.ulb.ac.be/ulb/etudes.html, http://www.ulg.ac.be/aacad/prog-cours/sciences/FSCHome.html#Biol, http://www.sc.ucl.ac.be, mars 2001)

universités	**1ère candidature**	**2ème candidature**	**1ère licence**
UCL Total du nombre d'heures de la formation en mathématiques et en statistiques : 120 heures de théorie + 90 heures d'exercices	mathématiques générales : A) éléments de géométrie analytique et d'analyse infinitésimale B) calcul matriciel, vectoriel et géométrique 90 heures de théorie + 60 heures d'exercices	statistique en sciences naturelles 30 heures de théorie + 30 heures d'exercices	
ULB Total du nombre d'heures de la formation en mathématiques et en statistiques : 140 heures de théorie + 140 heures de séminaires	mathématiques générales 95 heures de théorie + 95 heures de séminaires	probabilités et statistiques (y compris des exercices d'informatique) 45 heures de théorie + 45 heures de séminaires	
ULG Total du nombre d'heures de la formation en mathématiques et en statistiques : 90 heures de théorie + 70 heures d'exercices	mathématiques générales 60 heures de théorie + 40 heures d'exercices	statistiques générales et traitement de données 30 heures de théorie + 30 heures d'exercices	

universités	**1ère candidature**	**2ème candidature**	**1ère licence**
FUNDP	éléments de géométrie analytique et d'analyse infinitésimale	éléments de géométrie analytique et d'analyse infinitésimale	biostatistiques
Total du nombre d'heures de la formation en mathématiques et en statistiques : 105 heures de théorie + 67,5 heures de travaux dirigés, d'exercices ou de travaux pratiques	45 heures de théorie + 30 heures de travaux dirigés	15 heures de théorie + 7,5 heures d'exercices	15 heures de théorie + 15 heures de travaux pratiques
		notions de statistiques 30 heures d'exercices + 15 heures d'exercices	

Tous les étudiants de ces différentes universités suivent un cours de mathématiques « générales » et un cours de statistiques.
Le premier se donne en première candidature dans toutes les universités sauf aux FUNDP où il est divisé en deux parties : une en première candidature et la seconde en deuxième.
Le cours de statistiques se donne en deuxième candidature dans toutes les universités.
Le nombre d'heures d'enseignement de ces deux cours varie fortement d'une université à l'autre. On passe de 97,5 à 190 heures (théorie + exercices) pour le cours de mathématiques et de 60 à 90 heures (théorie + exercices) pour celui de statistiques.
Les FUNDP se positionnent en avant dernière position avec 170 heures (théorie + exercices) de formation en mathématiques et en statistiques, l'ULG dispensant 160 heures, l'UCL 210 et l'ULB 280.

Remarque : Toutes les données mentionnés sur le WEB n'ont pu être exploitées car elles sont difficilement comparables à cause, notamment, de mises à jour non réalisées.

3.3 Brève analyse de quelques ouvrages de mathématiques destinés aux étudiants en sciences de la vie.

Nous proposons dans cette partie une brève compilation des notions mathématiques abordées dans quelques manuels étrangers d'enseignement des mathématiques destinés aux étudiants du supérieur (de type universitaire ou non) en sciences de la vie (biologie, chimie,...). (Allain, Dorange, Langloi, [1] ; Azoulay, [5] ; Barnett et Ziegler, [6] ; Bertrandias, [8] ; Blondel, [9] ; Courrière, Plusquellec, [12] ; Geller, [15], [16] ; Swokowski, [21] ; Tebutt, [22]).

Dans ces ouvrages d'enseignement des mathématiques aux étudiants en sciences de la vie, nous retrouvons les notions suivantes (les notions apparaissant le plus fréquemment sont mentionnées en italique) :

- calculs algébriques
- *puissances et radicaux*
- trigonométrie et géométrie
- courbes planes et coordonnées polaires
- courbes en cloches, courbe sigmoïde, courbe logistique
- les vecteurs
- analyse vectorielle
- espaces vectoriels
- *fonctions élémentaires d'une variable réelle*
- limites de fonctions et continuité
- *dérivations et applications*
- *calcul intégral et applications*
- *fonctions exponentielles et logarithmiques*
- formule de Taylor, développements limités, applications
- séries numériques, somme, développement en série de Fourier
- *équations différentielles*
- les nombres complexes
- *fonctions de plusieurs variables*
- *traitement des données expérimentales, statistiques, analyse combinatoire*
- calcul matriciel
- transformation de Laplace

Il ressort de cette compilation que certaines notions, comme les fonctions de plusieurs variables, ne sont pas abordées dans tous les manuels. Or, elles nous sont apparues comme importantes après l'analyse des cours de première candidature en sciences biologiques.
Des notions, comme les statistiques, étudiés en 2ème candidature sont déjà traitées dans ces ouvrages. L'explication en est que ces ouvrages sont destinés à plusieurs années d'études. Certains manuels vont plus loin que d'autres dans les détails de la matière et ne répartissent pas toujours celle-ci de la même façon, ni dans le même ordre. Certaines notions peuvent ne constituer qu'un simple rappel dans un manuel et être tout à fait détaillées dans un autre, par exemple : certains ouvrages ([8], [26]) consacrent un chapitre entier aux limites alors que d'autres manuels ([5], [6], [7]) ne font que rappeler cette matière. Il est donc difficile de réaliser un classement méthodique des notions mathématiques intervenant dans ces manuels d'enseignement des mathématiques destinés aux étudiants en sciences de la vie.

La plupart de ces ouvrages montrent la volonté des auteurs d'ancrer les mathématiques dans le réel, de les concrétiser. Ils mettent en évidence l'utilité des concepts mathématiques par des exemples tirés de situations de biologie, de chimie, de la vie de tous les jours,... De même, ils présentent des exercices purement calculatoires et d'autres extraits d'un contexte scientifique. Ceux-ci devraient normalement clarifier la théorie et permettre aux étudiants d'évaluer leur maîtrise de la matière.

Chapitre 4

Le cours de mathématiques en première candidature biologie : quelques propositions d'amélioration.

4.1 Introduction

Au regard des analyses de cours de 1ère et de 2ème candidature, de cours de 1ère licence en biologie aux Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix, de l'étude du programme de mathématiques des deux dernières années de l'enseignement secondaire de transition, au vu des notions mathématiques abordées dans des manuels de « biomathématique » et dans des ouvrages d'enseignement des mathématiques destinés aux étudiants en sciences de la vie et après la rencontre de plusieurs professeurs, chercheurs et étudiants, diverses améliorations à apporter au cours de mathématiques en première candidature en biologie, tant d'un point de vue didactique que d'un point de vue contenu et organisation se sont imposées à nos yeux. Elles sont répertoriées et expliquées dans le présent chapitre.

Ensuite, nous proposons quelques améliorations dans un chapitre précis du cours de mathématiques de première candidature biologie : celui traitant des vecteurs.

Cette liste d'améliorations est bien évidemment non exhaustive. Notre travail permet d'entrevoir d'autres améliorations possibles.

4.2 Quelques améliorations proposées pour le cours de mathématiques de première candidature (sur base des constatations reprises dans les chapitres 1, 2 et 3)

Les notions actuellement abordées dans le cours de mathématiques de première candidature biologie se sont révélées indispensables. Même si elles ne sont pas toutes directement nécessaires dès la première candidature (comme les matrices, les nombres complexes,…), elles trouveront leur utilité par la suite.

Pour rappel, ces notions indispensables sont les suivantes :

- calcul matriciel et résolutions d'équations linéaires
- calcul vectoriel
- fonctions réelles élémentaires
- dérivées d'une fonction réelle
- primitives et intégrales
- fonctions logarithmes et exponentielles
- polynômes de Taylor
- introduction aux équations différentielles du 1er ordre
- nombres complexes
- fonctions de plusieurs variables

Par ailleurs, des rappels de matières portant sur la trigonométrie, la géométrie et sur les limites sont nécessaires pour les étudiants qui auraient oublié ces notions abordées en humanités. Dans la réalité, cette remise à niveau peut se faire à l'occasion des cours préparatoires ou des séances de monitorat. Il n'y a donc pas lieu d'intégrer ces matières dans le cours de mathématiques proprement dit.

Le programme de mathématiques dispensé en 1ère candidature en biologie aux FUNDP semble répondre aux principaux besoins. Néanmoins, instruits de nos différents contacts avec les professeurs et étudiants, de nos diverses analyses d'ouvrages de biologie, de cours de 1ère et de 2ème candidature, ainsi que de cours de 1ère licence en biologie, nous avons relevé quelques améliorations possibles à apporter au cours de mathématiques de 1ère candidature.

Nous les détaillons ici :

1) <u>améliorations portant sur le contenu du cours de mathématiques de première candidature :</u>

Certaines matières comme les fonctions de plusieurs variables, ou les vecteurs auraient besoin d'être développées plus en profondeur, avec plus de détails et de précisions. En effet, bien que les professeurs de physique affirment que les différentes définitions d'un vecteur n'affectent pas les étudiants (voir § 1.3.2), le professeur de mathématiques, lui, constate que ces versions divergentes engendrent une certaine ambiguïté dans la façon de définir rigoureusement les opérations sur les vecteurs. Un rappel concernant les projections de vecteurs sur des axes serait également nécessaire. Ce concept a été normalement étudié en humanités. Cependant, les étudiants éprouvent toujours des difficultés à réaliser ce genre d'exercices et le professeur de mathématiques ne révise pas ce concept dans son cours de mathématiques de première candidature. Ce concept est pourtant beaucoup utilisé en physique. Un paragraphe traitant de ce sujet dans le chapitre du cours de mathématiques concernant les vecteurs serait utile.

Le chapitre concernant les équations différentielles du premier ordre pourrait être plus développé. On pourrait, par exemple, étudier les changements de comportements des solutions en fonction des paramètres d'une équation ou encore travailler avec des équations plus complexes (non linéaires, par exemple).

De même, les fonctions de plusieurs variables utilisées et développées dans les cours de physique et de chimie de première candidature mériteraient qu'on s'y attarde d'avantage dans le cours de mathématiques. Cependant, il faut tenir compte du temps disponible pour le cours de mathématiques.

Il serait également intéressant que le cours de mathématiques initie à l'utilisation d'outils « mathématiques » comme une calculatrice graphique, des logiciels informatiques, par exemple. Mais s'il est important que les étudiants apprennent à se servir de ces outils, il est aussi indispensable qu'ils comprennent comment les programmes fonctionnent, ce qu'ils font, comment ils travaillent. Il faudrait en outre que les étudiants puissent interpréter les résultats que ces outils leur renvoient.
Il serait par exemple intéressant de consacrer exclusivement un chapitre à la fin du cours de mathématiques de première candidature à des démarches de modélisation de phénomènes tirés de la biologie. Ces démarches de modélisation utiliseraient différents concepts mathématiques étudiés précédemment dans le cours. Ces problèmes pourraient donc être résolus à la fois grâce à la théorie étudiée au cours, mais aussi grâce à un logiciel informatique qui utiliserait cette théorie. L'étudiant devrait alors être capable de résoudre le problème lui-même mais aussi par l'intermédiaire d'un logiciel informatique dont il aurait appris à se servir. Grâce à la théorie étudiée, il saurait également comment ce logiciel fonctionne. Enfin, il devrait pouvoir interpréter les résultats obtenus.

Dans le cours de mathématiques, le professeur essaie de faire percevoir l'utilité des mathématiques en biologie, en ouvrant celles-ci vers l'extérieur, en essayant d'illustrer les notions étudiés par certaines de leurs applications pratiques. Cependant, il est ressorti de nos entretiens avec les étudiants que la plupart d'entre eux éprouvent encore des difficultés à percevoir l'utilité des mathématiques en biologie. Cet aspect devrait donc encore être renforcé. Un chapitre (dans le cours de mathématiques) exclusivement consacré à la modélisation de phénomènes biologiques serait peut-être une solution.

<u>2) améliorations portant sur le développement de compétences dans le domaine de la réflexion, de la logique,…</u>

Outre les améliorations à apporter à la fois sur le plan didactique et sur le contenu du cours de mathématiques de première candidature, il pourrait être utile pour certains étudiants d'essayer de développer d'avantage une attitude de réflexion, une capacité à pouvoir faire des liens logiques entre deux notions, …

Un des objectifs du cours de mathématiques est d'aider les étudiants à acquérir plus de confiance en eux dans leur utilisation des mathématiques dès le début de la première candidature.
Comment essaie-t-on d'y arriver ?
Par une méthode progressive qui consiste à résoudre des exercices de difficultés croissantes, l'étudiant devrait s'aguerrir et peut-être ainsi obtenir cette assurance indispensable qui lui permettrait, en principe, de passer sans encombre au stade suivant.

Cette confiance et l'expérience acquise pas à pas devraient amener l'étudiant à un raisonnement plus clair, reposant sur le bon sens. Ainsi, il devrait éprouver moins de difficulté à modéliser des problèmes, c'est à dire : à pouvoir traduire en langage mathématique un problème formulé en français, à résoudre « mathématiquement » ce problème, à revenir à l'énoncé (en français) de départ et à confronter la solution mathématique au problème posé en faisant preuve de bon sens.

Le développement de ces compétences est déjà présent dans le cours actuel de mathématiques. Cependant, la majeure partie des étudiants éprouvent encore des difficultés à acquérir ce genre d'aptitude. La plupart des étudiants souhaitent d'ailleurs pouvoir réaliser d'avantage d'exercices de ce genre car ils se sentent démunis face à ceux-ci.
On pourrait donc envisager de développer d'avantage ces compétences en leur proposant un CDRom interactif reprenant de la théorie et leur proposant des exercices de modélisation en rapport. Les étudiants se sentant concernés par ce problème pourraient alors s'exercer d'avantage et cela sans freiner les autres étudiants.

3) <u>améliorations au niveau de l'organisation, de la répartition des cours de mathématiques et de statistiques :</u>

Les étudiants de première candidature souhaiteraient une meilleure concordance dans la planification des matières étudiées ou abordées parallèlement dans les différents cours de première candidature.
Concrètement, ils considèrent que programmer d'avantage d'heures de mathématiques dans le courant du 1er semestre de 1ère candidature leur permettrait d'étudier, et donc de maîtriser, la plupart des notions mathématiques (intégrales, équations différentielles,...) avant que celles-ci ne soient utilisées dans les autres cours.

Les étudiants de deuxième licence trouvent, quant à eux, qu'il serait intéressant d'étudier plus tôt le cours de statistiques de deuxième candidature parce qu'ils trouvent celui-ci plus utile à la biologie que les mathématiques « générales ». Ils souhaitent également d'avantage des séances d'exercices concernant ce cours de statistiques.

4.3 Présentation d'un chapitre remanié du cours de mathématiques : les vecteurs

Nous avons choisi de développer le chapitre du cours de mathématiques traitant des vecteurs, en fonction des éléments recueillis dans les trois premiers chapitres de ce mémoire. Celui-ci contiendra des modifications qui devraient permettre à l'étudiant de mieux appréhender certaines parties des différents cours de première candidature en sciences biologiques et plus particulièrement le cours de physique.
Toutefois, étant donné un carcan horaire inextensible et compte tenu du respect d' impératifs de programme et d'autres contraintes, il n'est possible d'accorder à l'étude de cette matière qu'une période d'enseignement approximative de trois heures.
Par conséquent, même si nous avons tenté d'être le plus complet et précis possible, nous avons choisi de ne pas développer tous les concepts relatifs à cette matière.

Réflexions préliminaires :

Pour préparer ce chapitre, nous nous sommes basée sur les constatations suivantes (voir § 1.2.3) :

- La différence entre un vecteur libre et un vecteur lié n'est pas prise en compte dans le cours de mathématiques alors qu'elle intervient en physique.
- En mathématiques, on travaille uniquement avec des vecteurs libres mais sans le signaler explicitement.
- L'origine des vecteurs, en mathématiques, coïncide avec l'origine O du système d'axes. Les composantes d'un vecteur sont donc automatiquement assimilées aux coordonnées de son extrémité.
- Dans le cours de mathématiques, on n'insiste pas sur le calcul de composantes alors qu'en physique cela engendre des difficultés chez les étudiants.

Nous avons également réfléchi à la présentation à adopter pour ce chapitre :

- Un vecteur est un objet mathématique pourvu de deux natures, l'une géométrique et l'autre algébrique, qui ont chacune leur intérêt dans les applications. Nous avons choisi de présenter ces deux natures car l'aspect géométrique contribue à la compréhension intuitive tandis que l'aspect algébrique garantit une meilleure compréhension au niveau calculatoire et une certaine rigueur dans les démonstrations.
- L'introduction des vecteurs en dimension deux et trois peut se faire de deux façons différentes : soit on définit les vecteurs de dimension trois que l'on particularise au plan, soit on définit les vecteurs dans le plan et on les généralise à l'espace de dimension trois. Nous avons privilégié cette deuxième approche, car elle nous place dans le cadre familier du plan des xy. L'avantage est que les vecteurs se dessinent et se visualisent plus facilement dans le plan que dans l'espace. En outre, les démonstrations dans le plan sont plus brèves car les vecteurs ont une composante de moins. Celles-ci sont donc plus compréhensibles.
- Nous n'avons pas redéveloppé la théorie concernant le produit vectoriel. Elle peut être étudiée dans le syllabus de mathématiques. (Thiry, [23])

- Les exercices présents dans le syllabus de mathématiques (Thiry, [23]) peuvent être réalisés par les étudiants. Nous proposons ici des exercices supplémentaires différents. Ces exercices se situent dans le cadre d'un espace à trois dimensions car la théorie a été illustrée dans le plan. Réaliser ces exercices devrait permettre à l'étudiant de mieux intégrer la théorie du calcul vectoriel dans un espace à trois dimensions et par la même occasion d'approfondir sa compréhension générale de la matière.

Nous proposons le titre et le plan suivants.

Eléments de calcul vectoriel

1. Introduction

2. Vecteurs et équipollence

2.1 définition d'un vecteur
2.2 équipollence

3. Les vecteurs en dimension deux

3.1 composantes d'un vecteur
3.1.1 coordonnées d'un point
3.1.2 composantes d'un vecteur
3.1.3 calcul de la norme d'un vecteur
3.1.4 calcul des composantes d'un vecteur
3.1.5 propriété

3.2 vecteur libre

3.3 opérations sur les vecteurs libres
3.3.1 addition de deux vecteurs
3.3.2 multiplication d'un vecteur par un nombre réel
3.3.3 propriétés des opérations vectorielles

3.4 le produit scalaire
3.4.1 définition
3.4.2 propriétés du produit scalaire

4. Généralisation : les vecteurs en dimension 3

4.1 composantes d'un vecteur

4.1.1 coordonnées d'un point
4.1.2 composantes d'un vecteur
4.1.3 calcul de la norme d'un vecteur
4.1.4 propriété

4.2 vecteur libre

4.3 opérations sur les vecteurs libres

4.3.1 addition de deux vecteurs
4.3.2 multiplication d'un vecteur par un nombre réel
4.3.3 propriétés des opérations vectorielles

4.4 le produit scalaire

4.4.1 définition
4.4.2 propriétés du produit scalaire

5. Exercices

Les différentes sections proposées dans ce plan sont détaillées dans les textes encadrés qui suivent.

1. Introduction

Des quantités comme l'aire, la température, le temps ne possèdent qu'une valeur quantitative et sont caractérisées par un nombre réel auquel est joint une unité de mesure comme des cm^2, des degrés ou des secondes. Une telle quantité est appelée quantité scalaire et le nombre réel correspondant un scalaire.

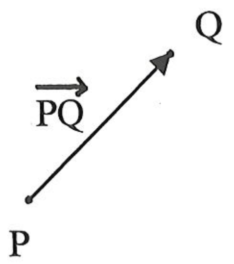
Par contre, un objet tel qu'une vitesse ou une force possède outre sa valeur quantitative, une direction et est souvent représenté par un segment orienté, c'est à dire un segment muni d'un sens. Cette constatation va nous conduire à la définition d'un vecteur.

2. Vecteurs et équipollence

2.1 définition d'un vecteur

Définition : Un ***vecteur*** est un segment orienté caractérisé par sa longueur, sa direction et son sens.

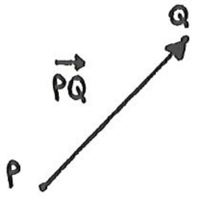
Un segment orienté d'origine P et d'extrémité Q est donc un vecteur. On le note $\overrightarrow{PQ}$ et graphiquement, son sens est indiqué par une pointe de flèche en Q. La longueur du segment PQ s'appelle la norme du vecteur $\overrightarrow{PQ}$ et se note $\| \overrightarrow{PQ} \|$.

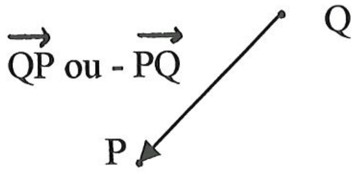


Un vecteur dont l'origine coïncide avec l' extrémité est un ***vecteur nul***. On le note $\vec{0}$. Graphiquement, il correspond à un point. Par convention, il est supposé avoir n'importe quelle direction et n'importe quel sens. Il est le seul vecteur dont la norme vaut 0.

$\vec{0}$ • $\| \vec{0} \| = 0$

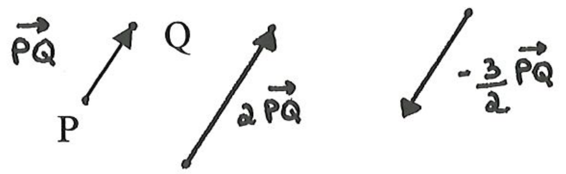
L'opposé d'un vecteur $\overrightarrow{PQ}$ est un vecteur d'origine Q et d'extrémité P. On le note $\overrightarrow{QP}$ ou $-\overrightarrow{PQ}$. Il a la même direction que le vecteur $\overrightarrow{PQ}$, la même norme mais un sens opposé à celui de $\overrightarrow{PQ}$.





$\| \overrightarrow{PQ} \| = \| -\overrightarrow{PQ} \| = \| \overrightarrow{QP} \|$

Pour un nombre réel α et un vecteur $\overrightarrow{PQ}$ donnés, on définit $\alpha\,\overrightarrow{PQ}$ comme un vecteur dont la norme vaut α fois la norme $\|\overrightarrow{PQ}\|$ de $\overrightarrow{PQ}$, de même direction que $\overrightarrow{PQ}$, de même sens quand $\alpha > 0$ ou de sens opposé quand $\alpha < 0$.
Le vecteur $\alpha\,\overrightarrow{PQ}$ est appelé ***un multiple par un nombre réel de*** $\overrightarrow{PQ}$.

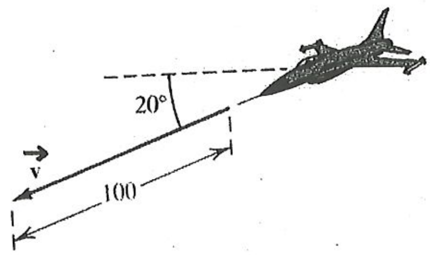


$\|\alpha\,\overrightarrow{PQ}\| = |\alpha|\,\|\overrightarrow{PQ}\|$
où $|\alpha|$ est la valeur absolue du nombre α

Remarque : Un vecteur dont les extrémités ne sont pas spécifiées se note par une lettre minuscule $\vec{v}$, par exemple $\vec{v}$

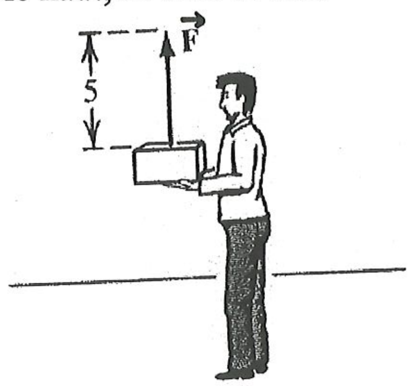
Exemples d'utilisation des vecteurs :

1. Un avion descend à la vitesse constante de 100 km/h suivant une ligne de vol qui fait un angle de 20° avec l'horizontale. Toutes ces données sont connues dans le vecteur $\vec{v}$ de norme 100. C'est un vecteur vitesse.



2. Les vecteurs permettent de représenter de nombreux phénomènes physiques. Par exemple, un vecteur qui représente une poussée ou une traction est un vecteur force. La force que déploie une personne qui tient un poids de 5 kg est représentée par le vecteur $\vec{F}$ de norme 5.

Cette force a la même amplitude que la force exercée sur le poids par la pesanteur, mais agit en sens inverse ce qui explique qu'il n'y ait aucun mouvement ni vers le haut, ni vers le bas.



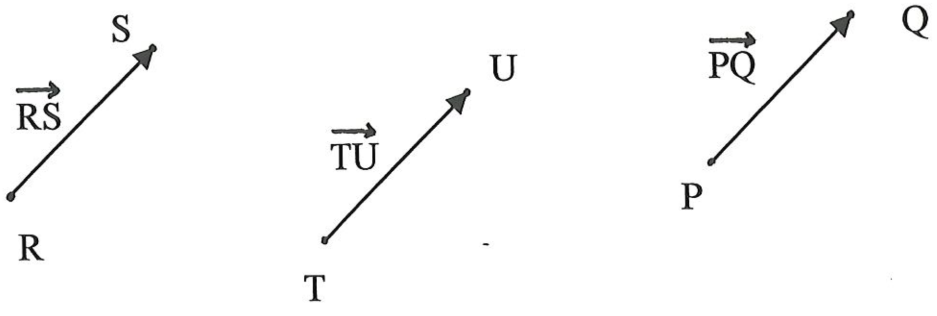
2.2 <u>équipollence</u>

<u>Définition :</u> Deux vecteurs non nuls <u>de même direction, de même norme et de même sens</u> sont dits ***équipollents***.

Les vecteurs équipollents sont considérés comme équivalents et on peut écrire

$$\overrightarrow{RS} \equiv \overrightarrow{PQ}\ ,\ \overrightarrow{TU} \equiv \overrightarrow{PQ} \text{ et } \overrightarrow{RS} \equiv \overrightarrow{TU}$$

où $\equiv$ est le symbole utilisé pour noter l'équipollence.



<u>Remarque :</u> Deux vecteurs nuls sont équipollents.

3. Les vecteurs en dimension deux

3.1 composantes d'un vecteur

3.1.1 coordonnées d'un point

Dans le plan, tout point P peut être représenté dans un système d'axes orthogonaux (Ox, Oy) par une paire ordonnée (x_P, y_P) de nombres réels qui sont ses ***coordonnées cartésiennes***.

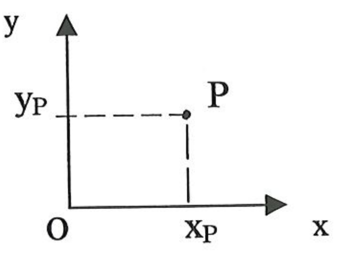


Figure1: coordonnées cartésiennes du point P dans le système d'axes (Ox, Oy) : (x_P, y_P)

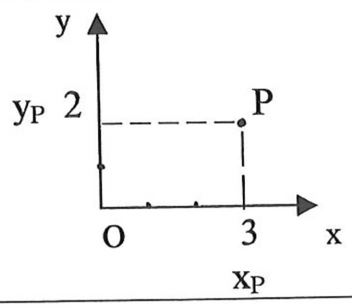
O est appelée origine des axes.

Les coordonnées cartésiennes (x_P, y_P) d'un point P dans ce système d'axes sont obtenues comme suit (voir figure 1) : la droite passant par P et orthogonale à l'axe Ox coupe cet axe en un point de coordonnées $(x_P, 0)$; la droite passant par P et orthogonale à l'axe Oy coupe cet axe en un point de coordonnées $(0, y_P)$.

On peut donc associer à tout point du plan une paire (x_P, y_P) de nombres réels et inversement.

Remarque : P a pour coordonnées (x_P, y_P) peut se noter $P = (x_P, y_P)$ ou $P\ (x_P, y_P)$.

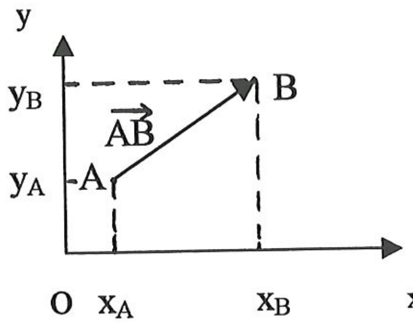
Exemple :



coordonnées cartésiennes du point P dans le système d'axes (Ox, Oy) : $(x_P, y_P) = (3, 2)$

3.1.2 composantes d'un vecteur

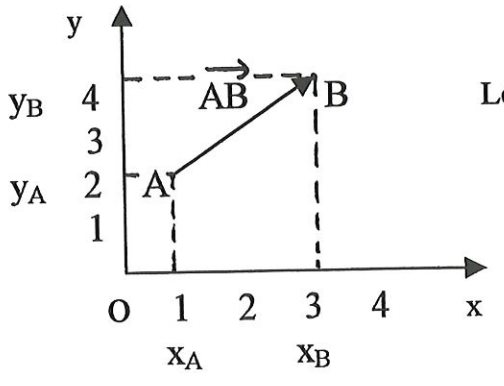
Dans le plan, à chaque vecteur correspond un couple ordonné de nombres réels qui sont ses ***composantes cartésiennes***.
La première composante est obtenue en soustrayant l'abscisse de l'origine du vecteur à l'abscisse de l'extrémité du vecteur. La deuxième composante est obtenue en soustrayant l'ordonnée de l'origine du vecteur à l'ordonnée de l'extrémité du vecteur.



Le point A a pour coordonnées (x_A, y_A)
B (x_B, y_B)

$\overrightarrow{AB}$ a donc pour composantes $(x_B - x_A, y_B - y_A)$

Exemple : Soit A et B deux points.



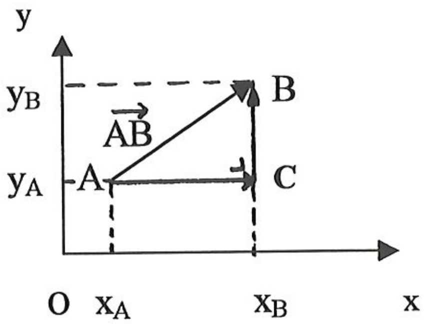
Le point A a pour coordonnées (1, 2)
B (3, 4)

$\overrightarrow{AB}$ a pour composantes (3 – 1, 4 – 2) c'est à dire (2, 2)

3.1.3 calcul de la norme d'un vecteur

On a défini précédemment la ***norme*** d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ comme la longueur du segment qui le représente. Elle est notée $\| \overrightarrow{AB} \|$. La norme d'un vecteur peut également être calculée grâce au théorème de Pythagore, par la formule

$$\| \overrightarrow{AB} \| = [\,(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2\,]^{½}$$



En effet, selon le théorème de Pythagore, « dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égale à la somme des carrés des longueurs deux autres côtés ».

On a donc par le théorème de Pythagore que

$$\| \overrightarrow{AB} \|^2 = \| \overrightarrow{AC} \|^2 + \| \overrightarrow{CB} \|^2$$

où $\| \overrightarrow{AC} \| = (x_B - x_A)$ et $\| \overrightarrow{CB} \| = (y_B - y_A)$

donc $\| \overrightarrow{AB} \|^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$

et $\| \overrightarrow{AB} \| = [(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2]^{1/2}$

Remarque : La norme d'un vecteur est toujours positive.

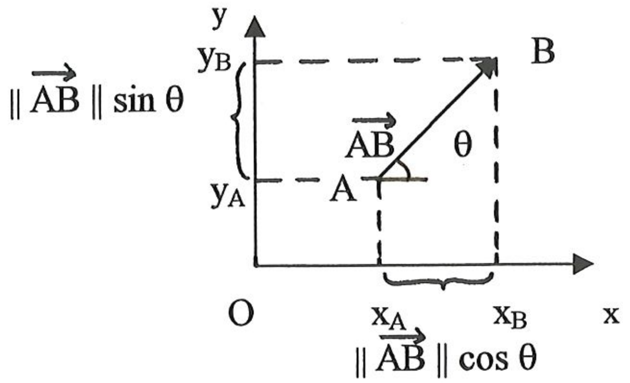
$\| \overrightarrow{AB} \| = 1$, $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normé ou unitaire

Exemple : Considérons deux points A et B tels que
A a pour coordonnées (1, 2),
B a pour coordonnées (3, 4)

$$\| \overrightarrow{AB} \| = [(3-1)^2 + (4-2)^2]^{1/2} = [(2)^2 + (2)^2]^{1/2}$$
$$= (4+4)^{1/2}$$
$$= (8)^{1/2} = 2\,(2)^{1/2}$$

3.1.4 calcul des composantes d'un vecteur

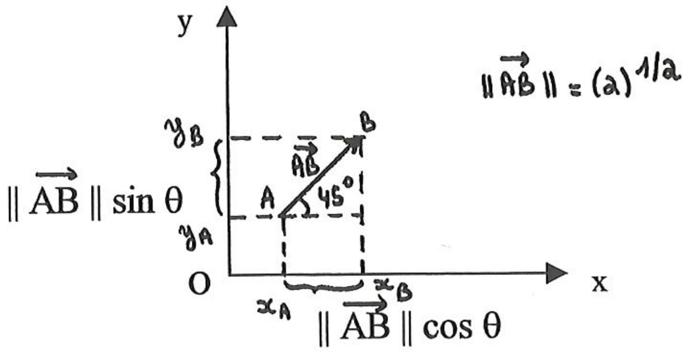
Soit A, B deux points de coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B)



On a vu que $\overrightarrow{AB}$ avait pour composantes ($x_B - x_A$, $y_B - y_A$). Par les relations trigonométriques du triangle rectangle, on sait que $x_B - x_A = \|\overrightarrow{AB}\| \cos\theta$ et que $y_B - y_A = \|\overrightarrow{AB}\| \sin\theta$. $\overrightarrow{AB}$ a donc pour composantes ($\|\overrightarrow{AB}\| \cos\theta$, $\|\overrightarrow{AB}\| \sin\theta$).

Exemple:

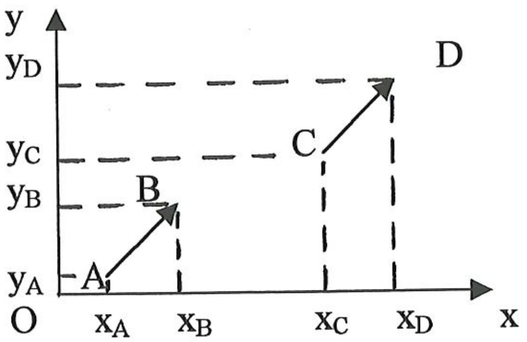
Soit un vecteur $\overrightarrow{AB}$ de norme $(2)^{1/2}$ et faisant un angle de 45° avec l'horizontale.



$\|\overrightarrow{AB}\| \cos\theta = (2)^{1/2} \cos 45° = (2)^{1/2} [(2)^{1/2} / 2] = 1$
$\|\overrightarrow{AB}\| \sin\theta = (2)^{1/2} \sin 45° = (2)^{1/2} [(2)^{1/2} / 2] = 1$
$\overrightarrow{AB}$ a donc pour composantes ($\|\overrightarrow{AB}\| \cos\theta$, $\|\overrightarrow{AB}\| \sin\theta$) c'est à dire (1,1).

3.1.5 propriété

Deux vecteurs équipollents ont les mêmes composantes.



On va démontrer cette propriété pour deux vecteurs non nuls.

Hypothèse : Soit $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs non nuls et équipollents
c'est à dire $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{CD} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$

Thèse : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont les mêmes composantes :
$(x_B - x_A, y_B - y_A) = (x_D - x_C, y_D - y_C)$
c'est à dire $x_B - x_A = x_D - x_C$ et $y_B - y_A = y_D - y_C$

Démonstration :

$\overrightarrow{AB}$ est équipollent à $\overrightarrow{CD}$. Par la définition d'équipollence, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont donc la même norme, la même direction et le même sens.

$\overrightarrow{AB}$ a la même norme que $\overrightarrow{CD}$: $\| \overrightarrow{AB} \| = \| \overrightarrow{CD} \|$ et donc $\| \overrightarrow{AB} \|^2 = \| \overrightarrow{CD} \|^2$

c'est à dire $(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2$ (1)

$\overrightarrow{AB}$ a la même direction que $\overrightarrow{CD}$ ($\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont donc la même pente) :

$$(y_B - y_A) / (x_B - x_A) = (y_D - y_C) / (x_D - x_C) \qquad (2)$$

En isolant $y_B - y_A$ dans l'équation (2),

on a $y_B - y_A = [(y_D - y_C) \cdot (x_B - x_A)] / (x_D - x_C)$

et en substituant $y_B - y_A$ dans l'équation (1), on obtient

$$(x_B - x_A)^2 + \{[(y_D - y_C)^2 . (x_B - x_A)^2] / (x_D - x_C)^2\} = (x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2$$

$$(x_B - x_A)^2 \{1 + [(y_D - y_C)^2 / (x_D - x_C)^2]\} = (x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2$$

$$[(x_B - x_A)^2 / (x_D - x_C)^2] . [(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2] = (x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2$$

$$[(x_B - x_A)^2 / (x_D - x_C)^2] = 1$$

$$(x_B - x_A)^2 = (x_D - x_C)^2$$

et $x_B - x_A = x_D - x_C$

On obtient $y_B - y_A = y_D - y_C$ de la même façon. Isoler $x_B - x_A$ dans l'équation (2) et substituer le dans l'équation (1) :

$$\{[(y_B - y_A)^2 . (x_D - x_C)^2] / (y_D - y_C)^2\} + (y_B - y_A)^2 = (x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2$$

$$(y_B - y_A)^2 \{[(x_D - x_C)^2 / (y_D - y_C)^2] + 1\} = (x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2$$

$$[(y_B - y_A)^2 / (y_D - y_C)^2] . [(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2] = (x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2$$

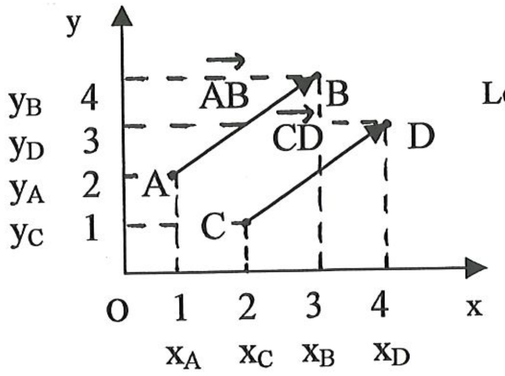
$$[(y_B - y_A)^2 / (y_D - y_C)^2] = 1$$

$$(y_B - y_A)^2 = (y_D - y_C)^2$$

et $y_B - y_A = y_D - y_C$

Remarque : Deux vecteurs nuls sont équipollents et ont donc les mêmes composantes.

Illustration :



Le point A a pour coordonnées (1, 2)
B (3, 4)
C (2, 1)
D (4, 3)

Géométriquement, on voit que $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AB}$ a pour composantes (3 – 1, 4 – 2) c'est à dire (2, 2)

$\overrightarrow{CD}$ a pour composantes (4 - 2, 3 – 1) c'est à dire (2, 2)

$\overrightarrow{AB}$ a bien les mêmes composantes que $\overrightarrow{CD}$

3.2 vecteur libre

Soit un vecteur $\overrightarrow{PQ}$ ayant pour composantes (a_1, a_2) et considérons l'ensemble de tous les vecteurs équipollents à $\overrightarrow{PQ}$. On sait que tous ces vecteurs ont les mêmes composantes (a_1, a_2). On voit donc que le couple (a_1, a_2) est une caractéristique commune à $\overrightarrow{PQ}$ et à l'ensemble de tous les vecteurs qui lui sont équipollents. Cette caractéristique commune sera appelée ***« vecteur libre »***.

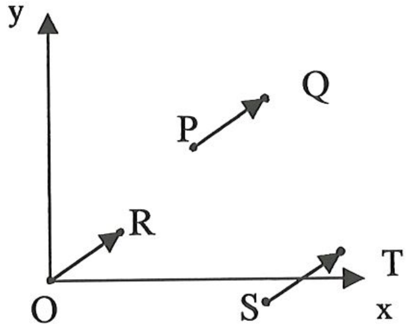


Figure 2: $\overrightarrow{PQ} \equiv \overrightarrow{ST} \equiv \overrightarrow{OR} \equiv \ldots$
$\overrightarrow{PQ}$ a pour composantes (a_1,a_2)

Définition : Un ***vecteur libre*** est défini par un couple de nombres réels (a_1, a_2) qui sont ses composantes.

Un vecteur libre (a_1, a_2) peut donc se représenter géométriquement par tout vecteur ayant pour composantes (a_1, a_2).
Lorsqu'on parle de « vecteur libre » on sous-entend n'importe quel vecteur le représentant.

Remarque : La figure 2 montre plusieurs représentants d'un vecteur libre (a_1, a_2) donné. Il existe encore d'autres représentants du vecteur libre (a_1, a_2) donné.

3.3 opérations sur les vecteurs libres

On travaille avec des vecteurs libres. Parler de segment orienté revient donc à parler d' un représentant d' un vecteur libre.

3.3.1 addition de deux vecteurs

Définition : La ***somme de deux vecteurs*** $\vec{a} = (a_1, a_2)$ et $\vec{b} = (b_1, b_2)$ est un troisième vecteur, noté $\vec{a} + \vec{b}$ et est défini par

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

Pour additionner deux vecteurs, on additionne composante par composante.

La norme de $\vec{a} + \vec{b}$ est celle de l'un quelconque de ses représentants, c'est à dire

$$\| \vec{a} + \vec{b} \| = [(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2]^{1/2}$$

Exemple : Soit $\vec{a} = (2, 2)$ et $\vec{b} = (1, -1)$

$$\vec{a} + \vec{b} = (2 + 1, 2 + (-1)) = (3, 1)$$

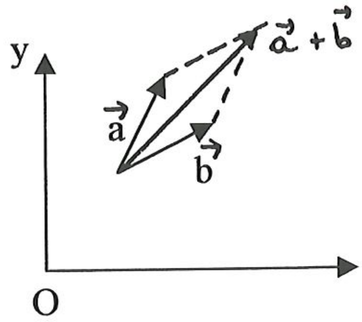
$$\text{et } \| \vec{a} + \vec{b} \| = [(3)^2 + (1)^2]^{1/2} = (10)^{1/2}$$

Interprétation géométrique :

Géométriquement, la somme $\vec{a} + \vec{b}$ de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ peut être obtenue de différentes façons :

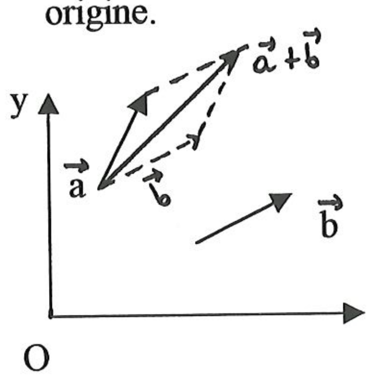
Remarque : Dans les figures, les représentants de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ seront également notés $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

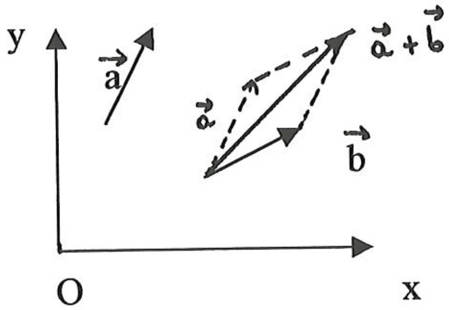
1) Si les représentants de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ont la même origine, un représentant de $\vec{a} + \vec{b}$ peut être représenté par le vecteur porté par la diagonale du parallélogramme ayant les représentants de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ comme côtés. Cette propriété est appelée « règle du parallélogramme ».



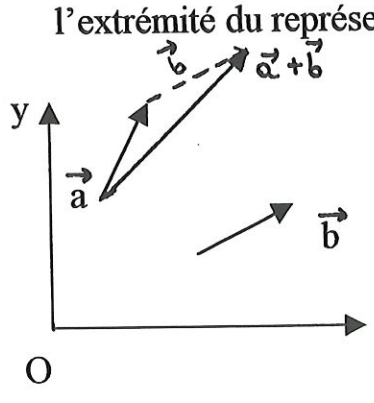
2a) Si les représentants de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ n'ont pas la même origine, pour obtenir un représentant de $\vec{a}+\vec{b}$, on peut également procéder comme suit : déterminer un autre représentant de $\vec{b}$ (un autre représentant de $\vec{a}$) ayant même origine que le représentant de $\vec{a}$ (le représentant de $\vec{b}$.

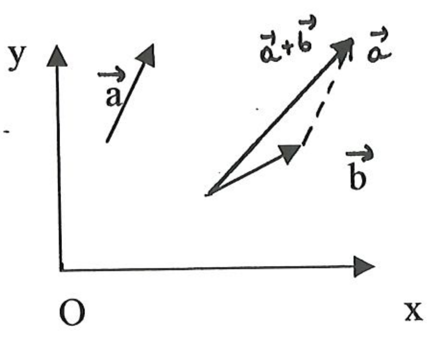
On peut alors appliquer le cas 1) aux deux représentants ayant la même origine.





2b) Si les représentants de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ n'ont pas la même origine, pour obtenir un représentant de $\vec{a}+\vec{b}$, on peut également procéder comme suit : déterminer un autre représentant de $\vec{b}$ (un autre représentant de $\vec{a}$) dont l'origine coïncide avec l'extrémité du représentant de $\vec{a}$ (du représentant de $\vec{b}$), un représentant de $\vec{a}+\vec{b}$ peut être représenté par le vecteur joignant l'origine du représentant de $\vec{a}$ (du représentant de $\vec{b}$) à l'extrémité du représentant de $\vec{b}$ (du représentant de $\vec{a}$).





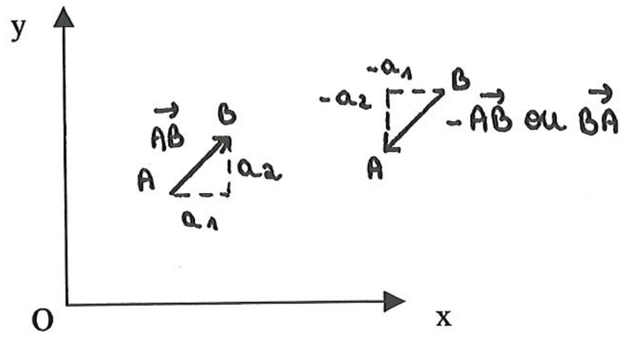
Définition : L'***opposé d'un vecteur*** $\vec{a} = (a_1, a_2)$ est un vecteur noté $-\vec{a}$ et défini par :

$$-\vec{a} = (-a_1, -a_2)$$

Pour obtenir l'opposé de $\vec{a}$, il suffit de prendre l'opposé de chacune de ses composantes.

Exemple: Soit $\vec{a} = (2, -2)$ on a $-\vec{a} = (-2, 2)$

Interprétation géométrique:



Soit $\vec{a} = (a_1, a_2)$ un vecteur et soit $\vec{AB}$ un de ses représentants. On remarque que $-\vec{AB}$, ayant pour composantes $(-a_1, -a_2)$, est un représentant du vecteur $-\vec{a}$.

Définition : Si $\vec{a} = (a_1, a_2)$ et $\vec{b} = (b_1, b_2)$, le vecteur $\vec{a} - \vec{b}$ est la ***somme du vecteur $\vec{a}$ et de l'opposé du vecteur $\vec{b}$***, c'est à dire

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2).$$

Donc, pour obtenir $\vec{a} - \vec{b}$, il suffit de soustraire $\vec{b}$ de $\vec{a}$ composante par composante.

La norme de $\vec{a} - \vec{b}$ est celle de l'un quelconque de ses représentants, c'est à dire :

$$\| \vec{a} - \vec{b} \| = [(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2]^{1/2}$$

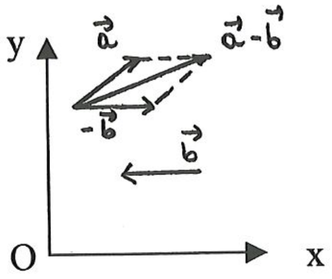
Exemple : Soit $\vec{a} = (2, 2)$ et $\vec{b} = (1, -1)$

$\vec{a} - \vec{b} = (2 - 1, 2 - (-1)) = (1, 3)$

et $\| \vec{a} - \vec{b} \| = [(1)^2 + (3)^2]^{1/2} = (10)^{1/2}$

Interprétation géométrique:

Remarque : Dans les figures, les représentants des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $-\vec{b}$ seront également notés $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $-\vec{b}$.



Considérons par exemple un représentant de $\vec{a}$ et un représentant de $\vec{b}$ n'ayant pas la même origine. Pour obtenir un représentant de $\vec{a} + (-\vec{b})$, on peut procéder comme suit : déterminer un représentant de $-\vec{b}$, travailler de la même façon que dans le cas 1), 2a) ou 2b) de la somme géométrique, selon que les représentants de $\vec{a}$ et $-\vec{b}$ aient la même origine ou non.

3.3.2 multiplication d'un vecteur par un nombre réel

Définition : Etant donné un nombre réel α et un vecteur $\vec{a} = (a_1, a_2)$, le ***vecteur*** $\vec{\alpha a}$ est défini par

$$\alpha\vec{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2)$$

Pour trouver le multiple par un nombre réel d'un vecteur, il suffit de multiplier chaque composante par le nombre réel.

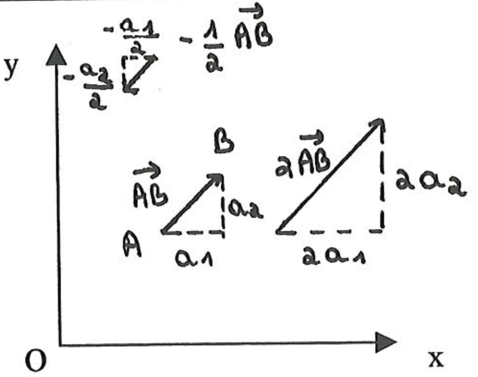
La norme de $\alpha\vec{a}$ est celle de l'un quelconque de ses représentants, c'est à dire

$$\| \alpha\vec{a} \| = [\alpha^2 ({a^2}_1 + {a^2}_2)]^{1/2}$$

Exemple : Soit $\vec{a} = (2, - 2)$, on a $5\vec{a} = (10, - 10)$

et $\| 5\vec{a} \| = [(10)^2 + (- 10)^2]^{1/2} = (200)^{1/2}$

Interprétation géométrique:



Soit $\vec{a} = (a_1, a_2)$ un vecteur et soit $\overrightarrow{AB}$ un de ses représentants. On remarque que $\alpha\ \overrightarrow{AB}$, ayant pour composantes $(\alpha a_1, \alpha a_2)$, est un représentant du vecteur $\alpha\vec{a}$.

3.3.3 propriétés des opérations vectorielles

Soit $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ des vecteurs et α, β des nombres réels.

1. On va dresser tout d'abord la liste d'un certain nombre de propriétés de l'addition et de la multiplication par un nombre réel pour des vecteurs quelconques $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ et α, β des nombres réels.
   Ces propriétés ne sont pas difficiles à retenir car elles ressemblent aux propriétés habituelles d'addition et de multiplication des nombres réels.

   $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
   $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
   $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$
   $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$

   $\alpha\,(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$
   $\alpha\,.\,\vec{0} = \vec{0}$
   $(\alpha + \beta)\,\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$
   $\alpha\,(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\,\vec{a} = \beta\,(\alpha\vec{a})$
   $1\,.\,\vec{a} = \vec{a}$, $-\vec{a} = (-1)\,\vec{a}$

   Démonstrations:

   Soit $\vec{a} = (a_1,a_2)$ et $\vec{b} = (b_1,b_2)$.

   Pour démontrer $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, il suffit de remarquer que
   $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) = (b_1 + a_1, b_2 + a_2) = \vec{b} + \vec{a}$.

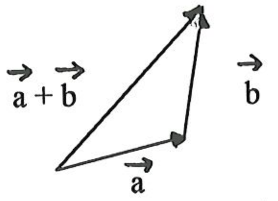
   La démonstration de $\alpha\,(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ se déroule comme ceci

   $$\begin{aligned}\alpha\,(\vec{a} + \vec{b}) &= \alpha\,(a_1 + b_1, a_2 + b_2)\\ &= (\alpha a_1 + \alpha b_1, \alpha a_2 + \alpha b_2)\\ &= (\alpha a_1, \alpha a_2) + (\alpha b_1, \alpha b_2)\\ &= \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}\end{aligned}$$

   Les autres démonstrations sont analogues et laissées à titre d'exercice.

2. $\|\vec{a}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0$

3. inégalité du triangle $\| \vec{a} + \vec{b} \| \leq \| \vec{a} \| + \| \vec{b} \|$



Géométriquement, si on représente les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{a} + \vec{b}$ comme les côtés d'un triangle (voir la figure). La longueur d'un côté $\| \vec{a} + \vec{b} \|$ n'excèdera pas la somme des longueurs des deux autres côtés

3.4 Le produit scalaire

On travaille avec des vecteurs libres. Parler de segment orienté revient donc à parler d' un représentant d' un vecteur libre.

3.4.1 définition

Le produit scalaire de deux vecteurs permet de calculer l'angle entre les représentants de ceux-ci.

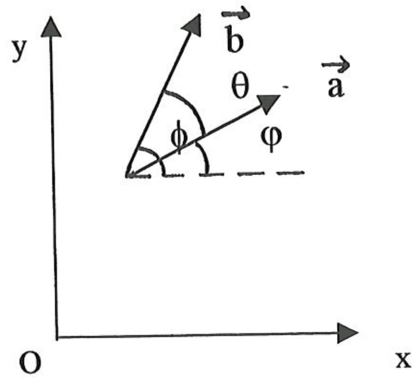
Définition : Le ***produit scalaire*** de deux vecteurs $\vec{a} = (a_1, a_2)$ et $\vec{b} = (b_1, b_2)$ est le nombre réel noté $\vec{a} \bullet \vec{b}$ et est défini par

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = a_1\, b_1 + a_2\, b_2$$

On peut montrer qu'il s'exprime également par

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \| \vec{a} \| \, \| \vec{b} \| \cos \theta$$

où θ désigne l'angle entre des représentants de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et satisfait à $0 \leq \theta \leq 180°$ ou $0 \leq \theta \leq \pi$ radians.



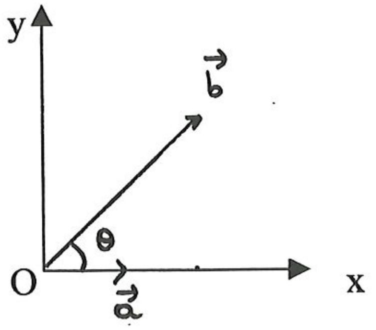
Remarque: dans la figure, les représentants de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont notés respectivement $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

Par le calcul des composantes du § 3.1.4, on sait que
$\vec{a}$ a pour composantes $(\|\vec{a}\| \cos \varphi, \|\vec{a}\| \sin \varphi)$
$\vec{b}$ a pour composantes $(\|\vec{b}\| \cos \phi, \|\vec{b}\| \sin \phi)$ et donc

$$\begin{aligned}\vec{a} \bullet \vec{b} &= \|\vec{a}\| \cos \varphi \,.\, \|\vec{b}\| \cos \phi + \|\vec{a}\| \sin \varphi \,.\, \|\vec{b}\| \sin \phi \\ &= \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \, (\cos \varphi \cos \phi + \sin \varphi \sin \phi) \\ &= \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \, \cos (\phi - \varphi) = \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \cos \theta\end{aligned}$$

où $\cos \theta = \cos (\phi - \varphi)$

Exemple : Déterminer l'angle entre les représentants de $\vec{a} = (1, 0)$ et $\vec{b} = (2, 2)$



On sait que $\vec{a} \bullet \vec{b} = \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \cos \theta$

Et on connaît $\vec{a} \bullet \vec{b} = 1 \,.\, 2 + 0 \,.\, 2 = 2$

et $\|\vec{a}\| = 1$ et $\|\vec{b}\| = (8)^{1/2}$

donc $\cos \theta = (\vec{a} \bullet \vec{b}) \,/\, [\|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\|] = 2 \,/\, 2.(2)^{1/2}$
donc $\theta = 45°$

3.4.2 propriétés du produit scalaire

Voici énumérées quelques propriétés du produit scalaire.

Soit $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ des vecteurs et α un nombre réel. On a

1. $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$
   $\vec{a} \bullet (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c}$
   $((\vec{a} + \vec{b}) \bullet \vec{c}) = \vec{a} \bullet \vec{c} + \vec{b} \bullet \vec{c}$
   $(\alpha \vec{a}) \bullet \vec{b}) = \vec{a} \bullet (\alpha\vec{b}) = \alpha (\vec{a} \bullet \vec{b})$
   $\| \vec{a} \| = [\vec{a} \bullet \vec{a}]^{1/2}$

Démonstration:

Soit $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ et $\vec{c} = (c_1, c_2)$

Nous allons démontrer $\vec{a} \bullet (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c}$

$$
\begin{aligned}
\vec{a} \bullet (\vec{b} + \vec{c}) &= (a_1, a_2) \bullet (b_1 + c_1, b_2 + c_2) \\
&= a_1 (b_1 + c_1) + a_2 (b_2 + c_2) \\
&= a_1 b_1 + a_1 c_1 + a_2 b_2 + a_2 c_2 \\
&= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_1 c_1 + a_2 c_2 \\
&= \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c}
\end{aligned}
$$

Les autres démonstrations sont laissées à titre d'exercice.

2. Si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont des vecteurs non nuls, alors

   $$\vec{a} \bullet \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

   Le produit scalaire de deux vecteurs non nuls est nul si et seulement si les représentants de ces vecteurs sont orthogonaux.

   Si $\vec{a}$ ou $\vec{b} = 0$ alors $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$

3. inégalité de Cauchy-Schwarz. $|\vec{a} \bullet \vec{b}| \leq \| \vec{a} \| \, \| \vec{b} \|$

Si l'un ou l'autre des vecteurs est nul, le résultat est trivial. Si aucun des deux vecteurs n'est nul, $\vec{a} \bullet \vec{b} = \| \vec{a} \| \| \vec{b} \| \cos \theta$ et donc $| \vec{a} \bullet \vec{b} | = \| \vec{a} \| \| \vec{b} \| | \cos \theta |$ où θ est l'angle compris entre les représentants de $\vec{a}$ et $\vec{b}$.
Or $| \cos \theta | \leq 1$, d'où $| \vec{a} \bullet \vec{b} | \leq \| \vec{a} \| \| \vec{b} \|$

4. Généralisation : les vecteurs en dimension trois

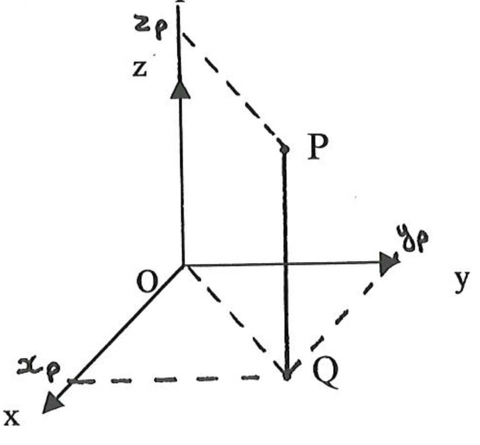
On va considérer des vecteurs qui ne sont plus nécessairement dans le plan mais dans un espace à trois dimensions. La plupart des notions et propriétés étudiées au cours de la section traitant des vecteurs en dimension deux s'étend aisément au cas de l'espace à trois dimensions. Ces propriétés ne seront donc plus démontrées ici.

4.1 composantes d'un vecteur

4.1.1 coordonnées d'un point

L'étude des vecteurs dans un espace de dimension trois requiert un système de coordonnées à trois dimensions.

Dans l'espace à trois dimensions, tout point P peut être représenté dans un système d'axes orthogonaux (Ox, Oy, Oz) (de manière analogue au cas des coordonnées d'un point dans le plan) par un triplet ordonné (x_P, y_P, z_P) de nombres réels qui sont ses ***coordonnées cartésiennes***.



coordonnées cartésiennes du point P dans le système d'axes (Ox, Oy, Oz) : (x_P, y_P, z_P)

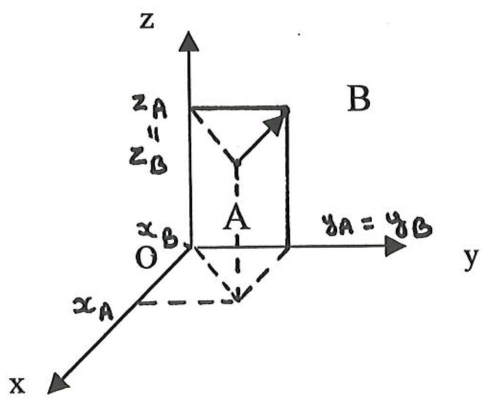
Les coordonnées cartésiennes (x_P, y_P, z_P) d'un point P dans ce système d'axes sont obtenues comme suit (voir figure) : la droite passant par P et orthogonale au plan (Ox, Oy) perce ce plan en un point Q, qui a pour coordonnées dans le système d'axes (Ox, Oy) le couple (x_P, y_P) ; la longueur du segment QP, mesurée positivement dans le sens de l'axe Oz, fournit la troisième coordonnée z_P du point P.

On peut donc associer à tout point de l'espace un triplet (x_P, y_P, z_P) de nombres réels et inversement.

Remarque : P a pour coordonnées (x_P, y_P, z_P) peut se noter $P = (x_P, y_P, z_P)$ ou $P\ (x_P, y_P, z_P)$.

4.1.2 composantes d'un vecteur

Dans l'espace de dimension trois, à chaque vecteur correspond un triplet ordonné de nombres réels qui sont ses ***composantes cartésiennes***.
Les composantes d'un vecteur dans un espace à trois dimensions se déterminent de la même façon que dans un espace à deux dimensions mais en vue de l'étude des vecteurs à trois dimensions, on ajoute une troisième composante.



Le point A a pour coordonnées (x_A, y_A, z_A)
Le point B a pour coordonnées (x_B, y_B, z_B)

$\overrightarrow{AB}$ a donc pour composantes $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$

4.1.3 calcul de la norme d'un vecteur

Le calcul de la norme d'un vecteur est semblable à celui du § 3.1.3 à ceci près que le vecteur a une composante en plus.

La ***norme*** d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est notée $\| \overrightarrow{AB} \|$ et peut être calculée grâce au théorème de Pythagore, par la formule

$$\| \overrightarrow{AB} \| = [\ (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2]^{1/2}$$

Remarque : Elle est toujours positive.

$$\| \overrightarrow{AB} \| = 1, \overrightarrow{AB} \text{ est un vecteur normé ou unitaire}$$

4.1.4 propriété

Deux vecteurs équipollents ont les mêmes composantes.

$\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$
$\overrightarrow{AB}$ a pour composantes $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$
$\overrightarrow{CD}$ a pour composantes $(x_D - x_C, y_D - y_C, z_D - z_C)$
donc $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) = (x_D - x_C, y_D - y_C, z_D - z_C)$

4.2 vecteurs libres

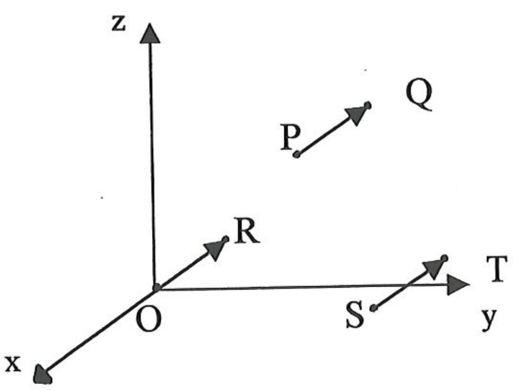


Figure 2: $\overrightarrow{PQ} \equiv \overrightarrow{ST} \equiv \overrightarrow{OR} \equiv \ldots$
$\overrightarrow{PQ}$ a pour composantes (a_1, a_2, a_3)

Définition : Un ***vecteur libre*** est défini par un triplet de nombres réels (a_1, a_2, a_3) qui sont ses composantes.

Un vecteur libre (a_1, a_2, a_3) peut donc se représenter géométriquement par tout vecteur ayant pour composantes (a_1, a_2, a_3).
Lorsqu'on parle de « vecteur libre » on sous-entend n'importe quel vecteur le représentant.

Remarque : La figure 2 montre plusieurs représentants d'un vecteur libre (a_1, a_2, a_3) donné. Il existe encore d'autres représentants du vecteur libre (a_1, a_2, a_3) donné.

4.3 opérations sur les vecteurs libres

A nouveau, on travaille avec des vecteurs libres. Parler de segment orienté revient donc à parler d' un représentant d'un vecteur libre.

Remarque : Les opérations sur les vecteurs en dimension trois vont être définies par analogie avec celles en dimension deux à ceci près que les vecteurs ont une composante supplémentaire.

4.3.1 addition de deux vecteurs

Définition : La ***somme de deux vecteurs*** $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ et $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ est un troisième vecteur, noté $\vec{a} + \vec{b}$ et est défini par

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

Pour additionner deux vecteurs, on additionne composante par composante.

La norme de $\vec{a} + \vec{b}$ est celle de l'un quelconque de ses représentants, c'est à dire

$$\| \vec{a} + \vec{b} \| = [(a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + (a_3 + b_3)^2]^{1/2}$$

Définition : L'***opposé d'un vecteur*** $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ est un vecteur noté $-\vec{a}$ et défini par :

$$-\vec{a} = (-a_1, -a_2, -a_3)$$

Pour obtenir l'opposé de $\vec{a}$, il suffit de prendre l'opposé de chacune de ses composantes.

Définition : Si $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ et $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, le vecteur $\vec{a} - \vec{b}$ est la ***somme du vecteur $\vec{a}$ et de l'opposé du vecteur $\vec{b}$***, c'est à dire :

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

Donc, pour obtenir $\vec{a} - \vec{b}$, il suffit de soustraire $\vec{b}$ de $\vec{a}$ composante par composante.

La norme de $\vec{a} - \vec{b}$ est celle de l'un quelconque de ses représentants, c'est à dire

$$\| \vec{a} - \vec{b} \| = [(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2]^{1/2}$$

4.3.2 multiplication d'un vecteur par un nombre réel

Définition : Etant donné un nombre réel α et un vecteur $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, le ***vecteur*** $\alpha\vec{a}$ est défini par

$$\alpha\vec{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3)$$

Pour trouver le multiple par un nombre réel d'un vecteur, il suffit de multiplier chaque composante par le nombre réel.

La norme de $\alpha\vec{a}$ est celle de l'un quelconque de ses représentants, c'est à dire

$$\| \alpha\vec{a} \| = [\alpha^2 (a^2{}_1 + a^2{}_2 + a^2{}_3)]^{1/2}$$

4.3.3 propriétés des opérations vectorielles

Remarque : Les propriétés énoncées au paragraphe 3.3.3 sont également valables dans le cas d'un espace à 3 dimensions. Les démonstrations de ces propriétés suivent exactement le même schéma que celles effectuées dans le cas d'un espace à deux dimensions. De plus, des exercices illustratifs sont proposés au paragraphe 5.

4.4 le produit scalaire

On travaille avec des vecteurs libres. Parler de segment orienté revient donc à parler d' un représentant d' un vecteur libre.

4.4.1 définition

Définition : Le ***produit scalaire*** de deux vecteurs $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ et $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ est le nombre réel noté $\vec{a} \bullet \vec{b}$ et est défini par

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + a_3\, b_3$$

On peut montrer qu'il s'exprime également par

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \| \vec{a} \| \, \| \vec{b} \| \cos \theta$$

où θ désigne l'angle entre des représentants de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et satisfait à $0 \leq \theta \leq 180°$ ou $0 \leq \theta \leq \pi$ radians.

4.4.2 propriétés du produit scalaire

Remarque : Les propriétés énoncées au paragraphe 3.4.2 sont également valables dans le cas d'un espace à 3 dimensions. Les démonstrations de ces propriétés suivent exactement le même schéma que celles effectuées dans le cas d'un espace à deux dimensions. De plus, des exercices illustratifs sont proposés au paragraphe 5.

5. Exercices

1. Evaluer les composantes du vecteur $\vec{v}$ représentant la vitesse dans l'énoncé suivant :
   Au football, un attaquant libère le ballon à une vitesse de 50 km/h sous un angle de 35° avec l'horizontale.

   Solution : $\vec{v}$ a pour composantes (50 cos 35°, 50 sin 35°)

2. Déterminer les composantes du vecteur libre représenté par $\overrightarrow{AB}$:

   A = (2, 4,- 5) et B = (4, - 2, 3)
   A = (1, - 4,- 5) et B = (4, - 2, 0)
   A = (0, 0, 0) et B = (4, - 2, 3)

   Solutions : $\overrightarrow{AB}$ a pour composantes (2, - 6, 8)
   $\overrightarrow{AB}$ a pour composantes (3, 2, 5)
   $\overrightarrow{AB}$ a pour composantes (4, - 2, 3)

3. Les vecteurs libres représentés par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont-ils équipollents ?

   1) A= (0, 4,- 5) et B = (4, - 2, 3)
   C = (1, 0,- 5) et D = (4, - 2, 0)
   2) A = (2, 4,- 5) et B = (4, - 2, 3)
   C = (1, 4,- 8) et D = (3, - 2, 0)

   Solutions :
   1) $\overrightarrow{AB}$ a pour composantes (4, - 6, 8) et $\overrightarrow{CD}$ a pour composantes (3, - 2, 5) donc $\overrightarrow{AB}$ n'est pas équipollent à $\overrightarrow{CD}$.
   2) $\overrightarrow{AB}$ a pour composantes (2, - 6, 8) et $\overrightarrow{CD}$ a pour composantes (2, - 6, 8) donc $\overrightarrow{AB}$ est équipollent à $\overrightarrow{CD}$.

4. Dessiner un représentant du vecteur libre $\vec{a}$ = (2, 3, 4) ainsi que du vecteur libre $\vec{b}$ = (1, - 2, 2).

5. Etant donné les points P = (- 2, 3, 1) et Q = (4, 5, 2), dessiner $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{QP}$, déterminer les composantes des vecteurs libres représentés respectivement par $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{QP}$.

Solutions : $\overrightarrow{PQ}$ a pour composantes (6, 2, 1) et $\overrightarrow{QP}$ a pour composantes (- 6, - 2, - 1)

6. Chercher un représentant de $5\vec{a} - 5\vec{b}$, $- 2\vec{a} - 2\vec{b}$, $5(\vec{a} - \vec{b})$ et de $- 2(\vec{a} + \vec{b})$ si

1) $\vec{a}$ a pour composantes (- 2, 6, 1) et $\vec{b}$ a pour composantes (3, - 3, - 1)
2) $\vec{a}$ a pour composantes (1, 2, - 3) et $\vec{b}$ a pour composantes (- 4, 0, 1)

Solutions :

$5\vec{a} - 5\vec{b}$ a pour composantes 1) (- 25, 45, 10)
a pour composantes 2) (25, 10, - 20)
$- 2\vec{a} - 2\vec{b}$ a pour composantes 1) (- 2, - 6, 0)
a pour composantes 2) (6, - 4, 4)
$5(\vec{a} - \vec{b})$ a pour composantes 1) (- 25, 45, 10)
a pour composantes 2) (25, 10, - 20)
$- 2(\vec{a} + \vec{b})$ a pour composantes 1) (- 2, - 6, 0)
a pour composantes 2) (6, - 4, 4)

comme on l'a vu précédemment $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ et $\alpha(\vec{a} - \vec{b}) = \alpha\vec{a} - \alpha\vec{b}$

7. Etant donné $\vec{a}$ ayant pour composantes (- 2, 3, 1), $\vec{b}$ ayant pour composantes (7, 4, 5) et $\vec{c}$ ayant pour composantes (1, - 5, 2), calculer le nombre $\vec{a} \bullet (\vec{b} + \vec{c})$, $\vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c}$, $(\vec{a} - \vec{c}) \bullet \vec{b}$ et $\vec{a} \bullet \vec{b} - \vec{c} \bullet \vec{b}$

Solutions :

$\vec{a} \bullet (\vec{b} + \vec{c}) = - 12$
$\vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c} = - 12$
$(\vec{a} - \vec{c}) \bullet \vec{b} = 6$
$\vec{a} \bullet \vec{b} - \vec{c} \bullet \vec{b} = 6$

comme on l'a vu précédemment, $\vec{a} \bullet (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c}$ et $(\vec{a} - \vec{c}) \bullet \vec{b} = \vec{a} \bullet \vec{b} - \vec{c} \bullet \vec{b}$

<u>Sources</u> : Swokowski, [21] ; Thiry, [23]

CONCLUSION

Tout au long de ce travail, nous avons cherché à savoir si le cours de mathématiques de première candidature en sciences biologiques aux Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix répondait aux attentes et besoins respectifs des professeurs et étudiants en biologie. Dans cette optique, nous avons tenté d'y apporter quelques perfectionnements.
Parallèlement, nous avons également essayé de déterminer quelle est l'utilité des mathématiques dans le domaine de la biologie.

Nous avons dès lors dédié notre premier chapitre aux mathématiques comme outil au service de différents cours de première candidature en sciences biologiques aux Facultés universitaires Notre-Dame de la Paix. Le deuxième chapitre de ce travail est consacré aux mathématiques comme outil au service de la biologie. Dans notre troisième chapitre, nous avons jeté un regard plus large sur l'enseignement des mathématiques en biologie. Enfin, dans le quatrième chapitre, sur base des constatations reprises dans les trois premiers chapitres, nous avons proposé quelques améliorations possibles à apporter au cours actuel de mathématiques de première candidature en biologie.

Nous avons remarqué que, dans le but d'améliorer la cohérence du cours de mathématiques avec les attentes et les besoins des professeurs et étudiants en biologie, quelques améliorations pourraient être apportées à ce cours, comme par exemple le remaniement du chapitre du cours traitant des vecteurs.
Nous avons également constaté que les mathématiques étaient utiles en biologie, notamment dans des démarches de modélisation de phénomènes étudiés en biologie. Dans cette optique, J. Bélair ([7]) fait remarquer que : « On dit que le vingtième siècle a été l'âge d'or de la physique mathématique. Suite à la décennie du cerveau, on pourrait assister au siècle de la biologie mathématique tant la biologie semble la prochaine science dont les fondements seront significativement affectés par une grande mathématisation. L'effort le plus connu dans ce sens est la cartographie du génome humain : maintenant que sa suite a été établie, le travail d'arrimage de cette imposante banque de données au fonctionnement de la réplication demeure entier. Pour employer une métaphore macroscopique, l'anatomie semble bien en place, mais la physiologie reste à établir. »

Nous espérons que ce travail pourra être utile à tout enseignant intéressé par le lien entre mathématiques et biologie. Cependant, nous n'avons pas totalement épuisé le sujet.
Nous aurions pu étudier plus en profondeur le contenu du cours de mathématiques dispensé en fin d'humanités ainsi que sa cohérence avec celui du cours de mathématiques donné en première candidature en sciences biologiques.
Nous aurions pu analyser un plus large éventail d'ouvrages traitant de biomathématique et de manuels d'enseignement des mathématiques destinés aux étudiants en sciences de la vie.
Notre regard sur l'enseignement des mathématiques en biologie aurait également pu être élargi en analysant plus en profondeur le cursus mathématique des étudiants en biologie dans d'autres universités.
Enfin, nous aurions pu préciser d'avantage le contenu de notre proposition de programme, présenter d'autres chapitres remaniés du cours actuel de mathématiques ainsi que tester ces propositions d'enseignement auprès des étudiants de première candidature en biologie.

Mais une vie entière, fut-elle séculaire, ne permettrait pas à un homme de parcourir tous les chemins de la terre. Nous avons donc fixé humblement les limites de notre travail de réflexion.

[10] BODART, F., CARDINAEL, G., GILLES, J.M., Premières candidatures en Sciences biologiques, géographiques et pharmaceutiques - Physique expérimentale - Mécanique du Solide, Namur, Librairie des Sciences, 1997.

[11] CAMPBELL,N.A., Biologie, Québec, De Boeck Université, 1995.

X [12] COURRIERE, P., PLUSQUELLEC, Y., Mathématiques à l'usage des pharmaciens et des biologistes, Paris, Ellipses, 1997.

[13] DOMINIQUE, P., « L'an 2000, année des mathématiques », La Libre Belgique du 06/09/00, page 22.

[14] FEDERATION DE L' ENSEIGNEMENT SECONDAIRE CATHOLIQUE, Mathématiques - enseignement de transition - 2e degré - 3e degré - 2, 4 et 6 périodes, Bruxelles, 2000.

X [15] GELLER, S., Abrégé de Mathématiques, Paris, Masson, 1978, 2ème édition.

[16] GELLER, S., Abrégés Statistique, Paris, Masson, 1991, 4ème édition.

[17] GRIFFE, M., Chimie, Namur, Presses Universitaires de Namur, 1996.

[18] HOPPENSTEADT, F.C., PESKIN, C.S., Mathematics in Medicine and the Life Sciences, New York, Springer-Verlag, 1992.

[19] MURRAY, J.D., Mathematical Biology, USA, Springer, 1993, second edition.

[20] Programme des cours, renseignements généraux 2000-2001 des Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix Namur, Belgique, 2000.

[21] SWOKOWSKI, Analyse, Bruxelles, De Boeck Université, 2000, 5ème édition.

[22] TEBBUTT, P., Basic Mathematics for Chemists, Grande-Bretagne, Wiley, 1994.

[23] THIRY, S., Première candidature en Sciences biologiques - Mathématiques - Tome 1 et 2 , Namur, Librairie des Sciences, 2000.